Besuchen Sie auch die Seite **http://www.matheaufgaben-loesen.de/**
dort gibt es viele Aufgaben zu weiteren Themen.

Analytische Geometrie - Lineare Algebra:

Grundlegende Aufgaben - Addition und Subtraktion von Vektoren

1. Wie lauten die Koordinaten des Vektors V in einem kartesischen Koordinatensystem, der von A(-1,2) nach A'(2,0) verläuft? (3|-2)
Wie lauten die Koordinaten des Bildpunktes B' von B((0,0), wenn B durch V nach B' verschoben wird? Lösung

2. Wie lauten die Koordinaten des Vektors V in einem kartesischen Koordinatensystem, der von A(1,-2) nach A'(-1,3) verläuft?
Wie lauten die Koordinaten des Bildpunktes B' von B((3,0), wenn B durch V nach B' verschoben wird?

3. Wie lauten die Koordinaten des Punktes A von dem aus eine Verschiebung mit dem Vektor V(3|-2) in den Punkt A'(3|1) erfolgt ist? Lösung

4. Wie lauten die Koordinaten des Punktes A von dem aus eine Verschiebung mit dem Vektor V(1|5) in den Punkt A'(1|4) erfolgt ist?

5. Ein Flugzeug fliegt mit einer Eigengeschwindigkeit von v_E = 180 km/h. Wind von schräg hinten mit einer Geschwindigkeit von v_W = 36 km/h sorgt dafür, dass das Flugzeug schneller als mit 180 km/h vorwärtskommt, aber vom Kurs abweicht. Es bleibt auf Kurs, wenn es um 8° gegen die Windrichtung geflogen wird.
Bestimmen Sie zeichnerisch:
Wie schnell kommt das Flugzeug mit Unterstützung des Windes voran?
Wie groß ist der Winkel zwischen der tatsächlichen Geschwindigkeit v des Flugzeuges und der Windrichtung? Lösung

6. Eine Fähre will mit einer Eigengeschwindigkeit von v_F = 15 kn (1 kn = 1,85 km/h) einen Fluss senkrecht überqueren. Von der Strömumg wird sie mit einer Geschwindigkeit v_S = 5 kn abgetrieben.
Bestimmen Sie zeichnerisch:
Welchen Winkel α muss sie zur Strömung einnehmen, damit sie den Fluss senkrecht überquert?
Mit welcher Geschwindigkeit v quert sie tatsächlich den Fluss?

7. Eine Fähre will einen Fluss senkrecht überqueren. Sie fährt mit 30° gegen die Strömung von v_S = 5 kn, um nicht abgetrieben zu werden.
Bestimmen Sie zeichnerisch:
Mit welcher Eigengeschwindigkeit v_E muss sie fahren, damit sie den Fluss senkrecht überquert? (10 kn)

Mit welcher Geschwindigkeit v quert sie tatsächlich
den Fluss? Lösung

8. Ein Motorflugzeug fliegt horizontal mit einer Geschwindigkeit von 25 m/s in Richtung SW. Eine Bö zieht es mit 8 m/s senkrecht nach oben und treibt es mit 12 m/s aus Richtung NW seitlich ab.
Wie groß ist dann seine tatsächliche Gesamtgeschwindigkeit v?
Mit wie viel km/h fliegt es dann tatsächlich in horizontaler Richtung?

9. Wie lauten die Koordinaten des Vektors $\vec{V}$ von Punkt A nach Punkt B?

a) A = (-1|3) ; B = (4|0)

b) A = (1|6) ; B = (-4|3)

c) A = (-3|6) ; B = (2|3)

d) A = (1|-2|2) ; B = (4|1|-1)

e) A = (2|0|-5) ; B = (0|-1|2)

f) A = (-2|3|1) ; B = (-3|1|4)

10. Ein Parallelogramm sei festgelegt durch den Punkt A und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B, C und D.

a) A (-3|-2), $\vec{a}$ = (7|-2), $\vec{b}$ = (1|5)

b) A (5|3), $\vec{a}$ = (-7|4), $\vec{b}$ = (-2|-6)

c) A (4|-5|-2), $\vec{a}$ = (-5|3|4), $\vec{b}$ = (0|-1|-2)

d) A (-3|4|1), $\vec{a}$ = (6|-3|4), $\vec{b}$ = (-1|2|-3)

11. Die Punkte A(-1|-2), B(3|-4) und C(1|3) sind Eckpunkte von Parallelogrammen.
Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen vierten Eckpunkte D und die Koordinaten der möglichen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die diese Parallelogramme aufspannen. Lösung

12. Die Punkte A(1|-2|2), B(-2|1|3) und C(5|-4|-1) sind Eckpunkte von Parallelogrammen.
Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen vierten Eckpunkte D und die Koordinaten der möglichen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die diese

Parallelogramme aufspannen.

13. Spannen die Punkte
a) A(-1-2), B(3|-4), C(5|2), D(1|4)
b) A(2|-4|1), B(4|2|3), C(3|8|2), D(1|2|0) ein Parallelogramm auf?
Wenn ja, mit welchen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$? Lösung

14. Spannen die Punkte

a) A(1|-5), B(3|1), C(2|6), D(0|1)

b) A(-1|3|-4), B(5|-1|3), C(-2|3|-1), D(4|-1|6)

ein Parallelogramm auf?
Wenn ja, mit welchen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

15. Die Verschiebung eines Punktes von A nach B kann durch einen Pfeil $\overrightarrow{AB}$ oder durch einen Vektor $\vec{v}$ festgelegt werden

a) Wie lauten die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$, wenn
A von (-4|5|3) nach B(2|-4|1)
oder
A von (6|-4|3) nach B(-1|4|5) verschoben wird?
b) In welchen Punkt B wird der Punkt A durch den Vektor $\vec{v}$ verschoben?
A(-2|6|3), $\vec{v}$ (5|0|-3)
oder
A(6|1|4), $\vec{v}$ (-4|-6|7)
c) Welchen Punkt A verschiebt der Vektor $\vec{v}$ in den Punkt B?
$\vec{v}$ (-3|-4|5), B(-3|-4|5),
oder
$\vec{v}$ (4|-2|1), B(-4|2|-1) Lösung

16. Berechnen Sie die Beträge der Vektoren:

a) $a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}; a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}; a_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{11} \\ \sqrt{11} \end{pmatrix}$

b)

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}; b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; b_3 = \begin{pmatrix} -3, \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}; b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ 7 \end{pmatrix};$$
$$b_5 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}; b_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; b_7 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

17. Berechnen Sie die die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und seines Gegenvektors.

a) A(1|0|1), B(3|4|5)

b) A(-1|3|0,5), B(-1|1|2,5)   Lösung

18. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B, wenn der Punkt A durch den Vektor $\vec{v} = \binom{3}{-2}$ darauf abgebildet wird.

a) A(2|5), b) A(-3|0)

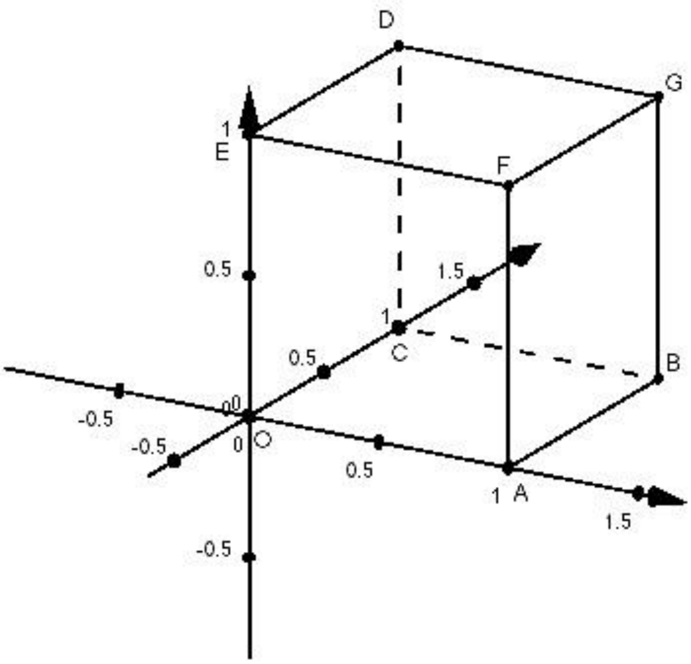
19. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B, wenn der Punkt A durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ darauf abgebildet wird.

a) A(1|2|0), b) A(-4|6|2)   Lösung

20. Zu welchem Punkt C ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$ Ortsvektor?

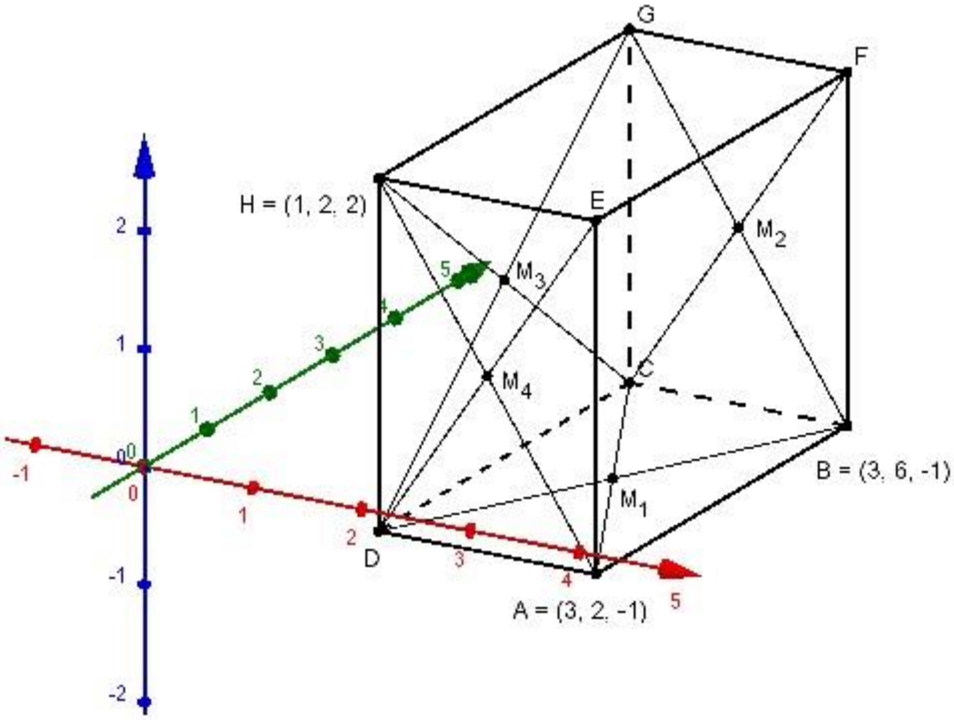
a) A (3|4|5); B (4|5|3), b) A (-1|2|5), B (0|0|0).

21. Wie lauten die Koordinaten der Vektoren
$\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{OG}$?



Lösung

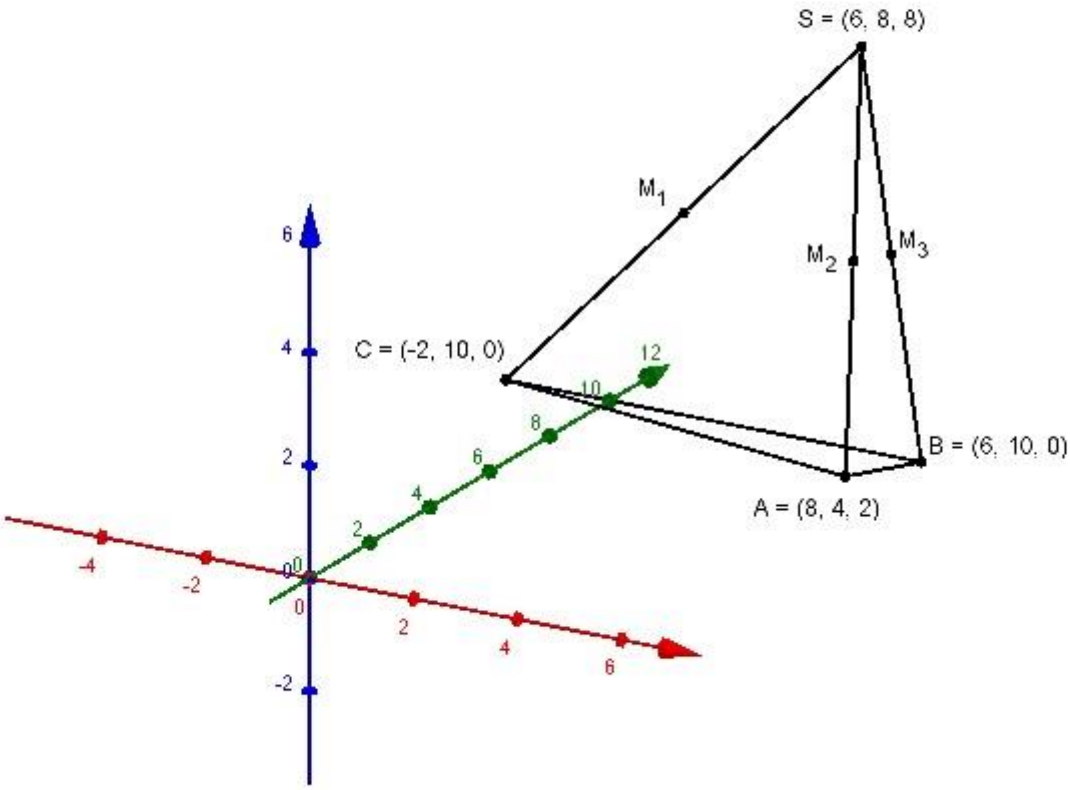
22. Wie lauten die Koordinaten der Punkte M_1, M_2, M_3 und M_4?



23. Die Punkte A (-2|-2), B (8|0) und C (6|4) bilden ein Dreieck.
M_1, M_2 und M_3 seien die Mittelpunkte der Dreieckseiten.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{BM_2}, \overrightarrow{CM_3}$

Lösung

24. Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren
$\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{SM_1}, \overrightarrow{SM_2}, \overrightarrow{SM_3}$



25. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke von A (-1|3) nach B (6|-8). Lösung

26. Von einer Strecke AB sind der Anfangspunkt A(2|5) und der Mittelpunkt M(-4|3) bekannt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Endpunktes B.

27. Die Strecke von A (5|4|1) nach B (6|7|3) wird verdoppelt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Endpunktes C. Lösung

28. A (3|7) und B (11|-1) sind gegenüberliegende Punkte eines Rechtecks.
Berechnen Sie die Koordinaten des Rechteckmittelpunktes M.

29. Ein Parallelogramm sei durch A(1|1), B(2|2) und C(3|-1) festgelegt.
Berechnen Sie die Koordinaten des 4. Punktes D und des Schnittpunktes M der Diagonalen. Lösung

30. Ein Parallelogramm sei durch A(-4|0), B(4|-2) und den Diagonalenschnittpunkt M(2|1,5) festgelegt.
Berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte C und D.

31. Ein Parallelogramm sei durch A(2|1|-3), B(6|-3|5) und den

Diagonalenschnittpunkt M(2,5|0,5|1) festgelegt.
Berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte C und D.
Lösung

32. M_1 (-2|1), M_2 (2|3) und M_3 (4|-1) sind die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, B und C des Dreiecks.

33. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Parallelogramms mit A(4|-2|5), B(7|9|-4), C(9|12|-2) und D (6|1|7) und die Koordinaten des Schwerpunktes F des Dreiecks ACD. Lösung

34. Die Punkte A(-2|0), B(6|0), C(4|5) und D(0|6) bilden ein Viereck.
M_1, M_2, M_3 und M_4 sind die Mittelpunkte der Viereckseiten.
Bilden die Verbindungslinien der Mittelpunkte ein Parallelogramm?

35. Im Dreieck ABC sind A(1|1), B(4|7) und der Schwerpunkt S(1|4) bekannt.
a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C. (C = (-2|4))
b) Ergänzen Sie die Dreiecke ABS, BCS und ASD so zu Parallelogrammen, dass die 4. Ecke S gegenüberliegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieser 3 Ecken. Lösung

36. Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten A und B.
a) A(4|-3), B(2|8)
b) A(6,8|-3,9), B(-8|6)

37. 3 Ortschaften wurden in einem räumlichen Koordinatensystem eingemessen.
A(373,70 m|-848,36 m|-25,06 m)
B(-79,34 m|-54,42 m|26,52 m)
C(-949,69 m|2 044,79 m|296,05 m)
Berechnen Sie, um wieviel m Luftlinie sich die Strecke von A nach C von der von A über B nach C unterscheidet. Lösung

38. Welcher Punkt D(d_1|d_2|1) ist von den Punkten A(1|2|3), B(4|3|5) und C(2|1|4) gleich weit entfernt?

39. Die Punkte A(5,1|-3,2|4,6) und C (-4,8|1,9|4,6) bilden zusammen mit Parallelen zur x- und y-Achse die Grundfläche eines Quaders mit einer Höhe von 12 Längeneinheiten.
Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte des Quaders?
Wie lang ist eine Raumdiagonale des Quaders? Lösung

40. Für welche Punkte D gilt
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ und d) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$,

wenn A = (2|-3), B = (-1|1) und C = (5|1)?

41. Berechnen Sie den Winkel α, den die Vektoren mit der x-Achse einschließen.

a) $\vec{a} = \binom{3}{4}$, b) $\vec{b} = \binom{12}{-5}$, c) $\vec{c} = \binom{-7{,}5}{-18}$, d) $\vec{d} = \binom{-5{,}6}{3{,}8}$

Lösung

42. Der Betrag eines Vektors $\vec{v}$ = 10 und sein Richtungswinkel α = 50° sind bekannt.
Berechnen Sie seine Koordinaten.

43. Nach einer Einmessung ergaben sich für 3 Orte die Daten:
A = (600|800|10), B = (1200|-300|120), C = (-250|430|400).
Welcher Unterschied in Grad ergibt sich, wenn erst B und dann C von A aus angepeilt wird? Wie lang ist der Weg l von A über B nach C?
Lösung

44. Die Punkte A = (5|6|8), B = (12|3|5) und C = (6|8|12) liegen in dem Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung bei (0|0|0).
Wie lauten die Ortsvektoren dieser Punkte, wenn der Koordinatenursprung in den Punkt (8|6|9) verschoben wird?

45. Die Punkte A = (-2|3), B = (3|1,5) und C = (0,5|-4,1) bilden ein Dreieck.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte, wenn das Dreieck an der x-Achse gespiegelt wird. Lösung

46. Die Punkte A = (-2,5|1,5) und B = (-0,5|-2,5) bilden ein Quadrat.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte, wenn das Quadrat am Koordinatenursprung gespiegelt wird.

47. Eine Dreieckspyramide ist durch A = (3|-2|5), B = (-2|0|1), C = (-4|3|-2) und D = (0|1|6) festgelegt.
Berechnen Sie die Längen ihrer Seiten. Lösung

48. Lässt sich der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}7\\5\\10\end{pmatrix}$ darstellen?

49. Lässt sich der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ darstellen? Lösung

50. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, b) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$, c) $2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AB}$, d) $2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{CD}$

51. Stellen Sie den Vektor $\vec{D}$ als Linearkombination
der Vektoren $\vec{A}, \vec{B}$, und $\vec{C}$ dar.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung

52. Stellen Sie den Vektor $\vec{D}$ als Linearkombination
der Vektoren $\vec{A}, \vec{B}$, und $\vec{C}$ dar.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}7 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

53. Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks
mit A = (1|-5), B = (0|3) und C = (-8|2). Lösung

54. Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks
mit A = (2|3|5), B = (6|6|0) und C = (2|8|0).

55. Wie lang sind die Seitenhalbierenden im Dreieck
mit A = (4|2|-1), B = (10|-8|9) und C = (4|0|1)? Lösung

56. Wie lang sind die Seitenhalbierenden im Dreieck
mit A = (1|2|-1), B = (-1|10|15) und C = (9|6|-5)?

57. Wie lauten die Koordnaten von A', wenn A = (5|6|6)
an B = (3|8|1) gespiegelt wird? Lösung

58. Wie lauten die Koordinaten von A', wenn A = (6|2|0)
an B = (4|5|-1) gespiegelt wird?

59. Wie lautet die Koordinate z von A = (5|0|z),

wenn A von B = (4|-2|5) den Abstand 3 haben soll?
Lösung

60. Wie lautet die Koordinate z von A = (5|0|z),
wenn A von B = (1|1|-2) den Abstand 5 haben soll?

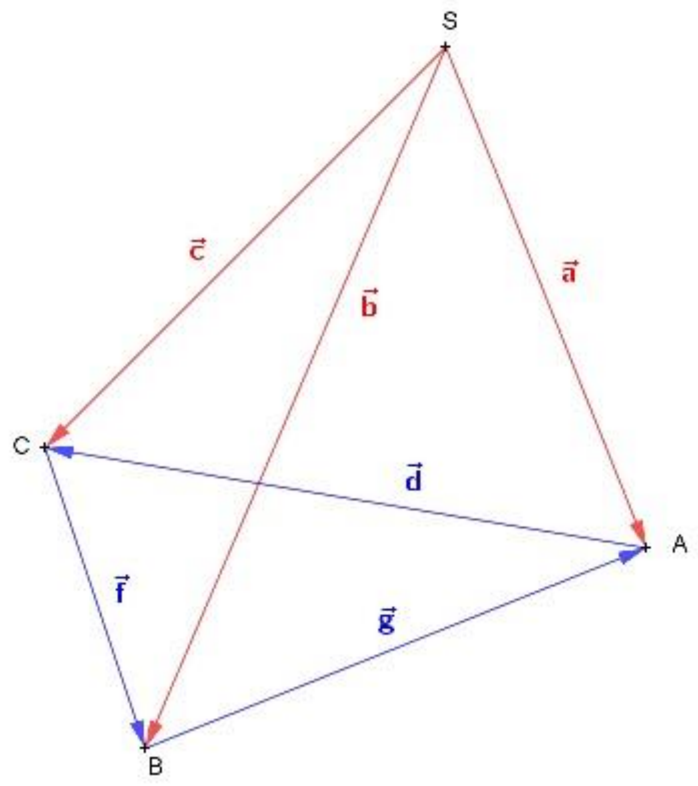
61. Wie lauten die Koordinaten der Punkte P und Q,
wenn sie von A = (1|2|-2) den Abstand 9 haben sollen?
Lösung

62. Wie lauten die Koordinaten der Punkte P und Q,
wenn sie von A = (12|3|4) den Abstand 2 haben sollen?

63. Wie lauten die Koordinaten des Punktes C,
der 3 Einheiten von B entfernt liegt, wenn
Lösung

64. Wie lauten die Koordinaten des Punktes C,
der 3 Einheiten von B entfernt liegt, wenn
A = (2|-3|1) und B = (10|5|15)?

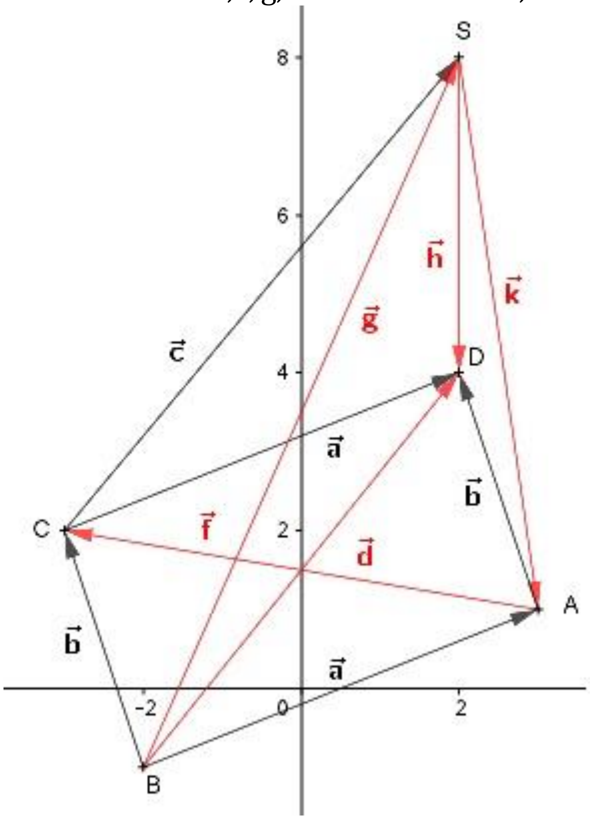
65. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen das Tetraeder auf.
Drücken Sie die Seiten der Grundfläche durch
$\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



Lösung

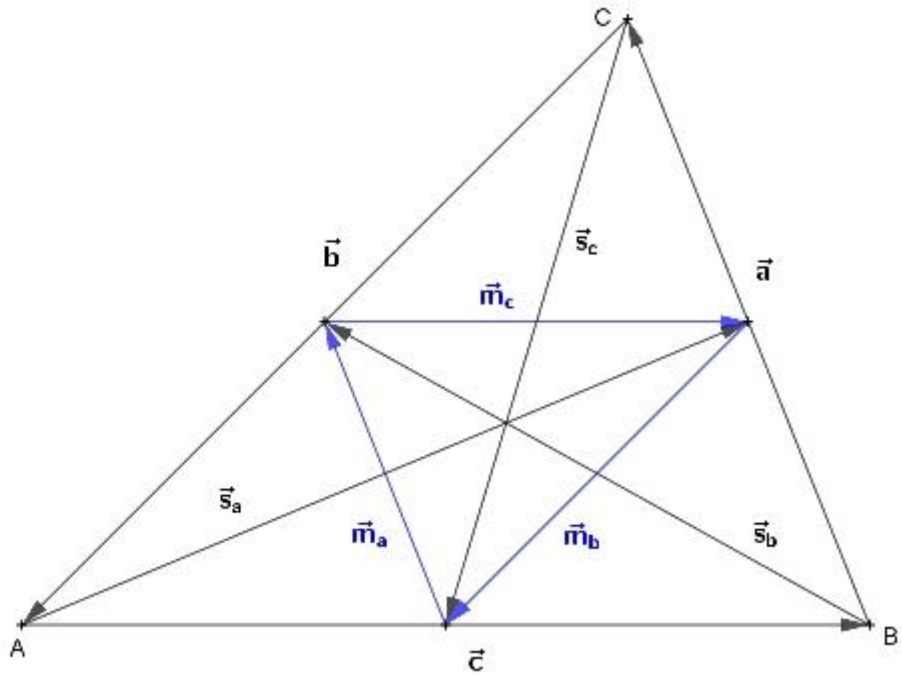
66. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen die Pyramide auf.

Drücken Sie $\vec{d}, \vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ und $\vec{k}$ durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



Lösung

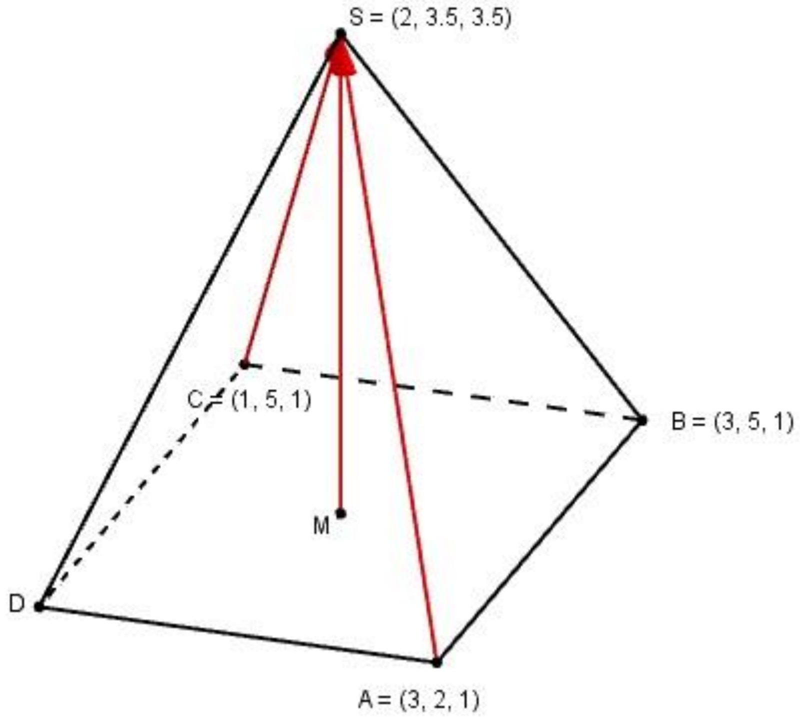
67. Drücken Sie durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:
a) die Seitenhalbierenden $\overrightarrow{s_a}$, $\overrightarrow{s_b}$ und $\overrightarrow{s_c}$
b) die Mittellinien $\overrightarrow{m_a}$, $\overrightarrow{m_b}$ und $\overrightarrow{m_c}$



68. Ein Tetraeder ist durch die 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$
von S aus bestimmt. M_1 ist die Mitte von AB. S_1 teilt

die Strecke SM_1 im Verhältnis 2 : 1.
Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 allgemein
und wenn A = (-1|-3|2), B = (3|0|0), C = (-2|3|1)
und S = (9|0|0). Lösung

69. Geben Sie von der quadratischen Pyramide
a) die Koordinaten der Punkte D und M an.
b) die Koordinaten der rot gekennzeichneten Vektoren an.



70. Für welche Zahlen r, s gilt:

a) $\binom{2}{5} = r * \binom{1}{1} + s * \binom{1}{2}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = s * \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung

71. Sind die Dreiecke mit

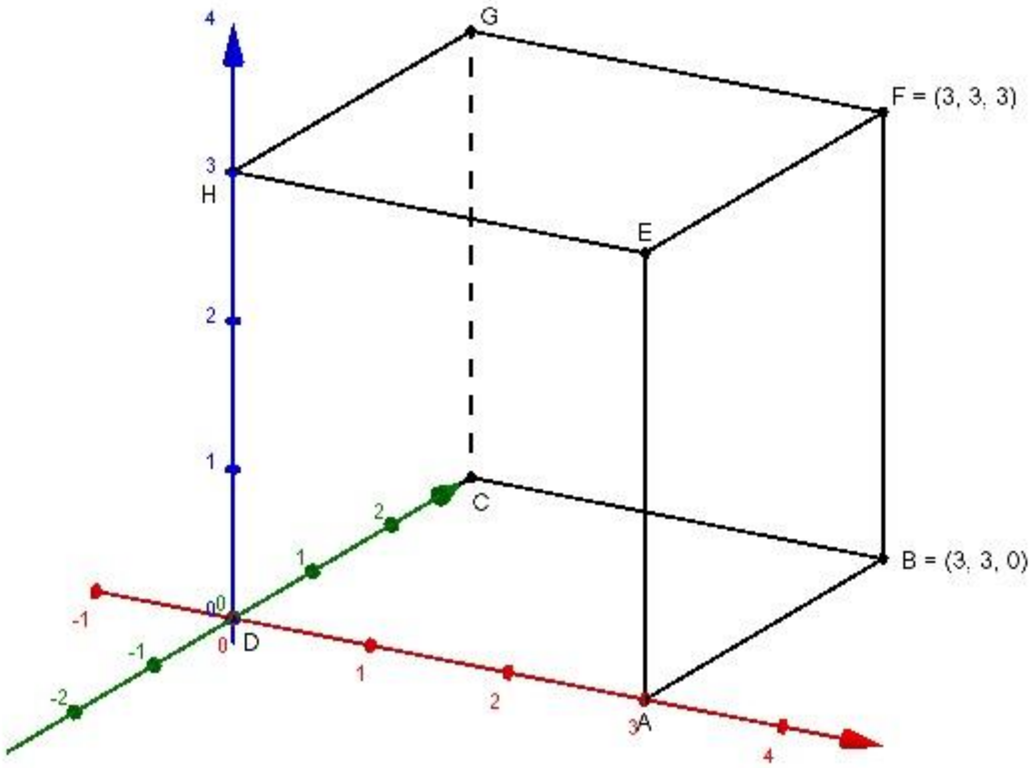
a) A = (-1|5), B = (0|3) und C = (-8|2)

b) A = (7|0|-1), B = (5|-3|-1) und C = (4|0|1)

gleichschenklig?

72. Ermitteln Sie für den Würfel
a) die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte und die
Kantenlänge des Würfels.

b) die Koordinaten der Mittelpunkte I von AB und J von EF
und deren Abstand.
c) Wie groß ist der Abstand vom Mittelpunkt K der Fläche ABCD
von dem Mittelpunkt L der Fläche ABEF?
d) Wie lang ist die Verbindung vom Punkt M = (2|2|0) aus zum
Punkt H?
Um wieviel Längeneinheiten ist sie länger als von M nach F?



Lösung

73. Das Dreieck mit A = (2|-4), B = (-3|8) und C = (4|3) soll erst mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und dann mit dem Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoben werden.
Wie lauten die Koordinaten der Endpunkte A'', B'' und C''?

74. M_1, M_2 und M_3 sind Seitenmitten.
Drücken Sie:
a) $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{M_1G}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1H}, \overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{BM_3}, \overrightarrow{M_2E}$ und $\overrightarrow{M_2M_1}$
durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.
b) M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1H}$ und G der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PM}$. Drücken Sie $\overrightarrow{MP}$ durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aus?
c) Drücken Sie $\overrightarrow{CP}$ durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aus. Lösung

75. Ein Quader ist bestimmt durch A = (4|0|0),

B = (0|6|0) und C = (0|0|2).
Auf welcher Raumdiagonalen liegt der Punkt
P = (2|3|1), auf $\overline{AG}, \overline{BE}, \overline{CD}$ oder $\overline{HF}$?

76. Ist das Viereck mit den Punkten A = (3|1|-1),
B = (4|-1|2), C = (2|0|1) und D = (0|4|-5) ein Trapez?
Lösung

Teilverhältnisse

77. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ bilden das
Dreieck ABC.
$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$
In welchem Verhältnis teilen sich $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$?

78. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ bilden das
Rechteck ABCD.
E ist der Mittelpunkt von $\overrightarrow{AD}$.
In welchem Verhältnis teilen sich $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$?
Lösung

79. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ bilden
das Parallelogramm ABCD.
E ist der Mittelpunkt von $\overrightarrow{BC}$, F der von $\overrightarrow{CD}$.
In welchem Verhältnis teilen sich a) $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$
und b) $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AF}$?

80. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$
bilden den Quader mit der Grundfläche ABCD und
der Deckfläche EFGH.
In welchem Verhältnis teilen sich die Raumdiagonalen?
Lösung

81. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$
bilden einen Tetraeder.
In welchem Verhältnis teilen sich die Strecken, die von A und B aus zum
Schwerpunkt des gegenüberliegenden Dreiecks verlaufen?

82. Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CG}$
bilden den Quader mit der Grundfläche ABCD
und der Deckfläche EFGH.
In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt des
Dreiecks ACH die Raumdiagonale $\overline{DF}$? Lösung

83. Die Punkte A = (0|0), B = (4|0) und C = (6|3) bilden das Dreieck ABC.

Berechnen Sie den Ortsvektor von T, wenn $\overrightarrow{AD}$ die Seitenhalbierende von C aus im Punkt T schneidet

und $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{BC}$ ist.

84. A = (0|0) und die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden das Dreieck ABC.

$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{BC}$

Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes T von $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$? Lösung

85. A = (0|0) und die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden das Rechteck ABCD.

E ist der Mittelpunkt von $\overline{AD}$.

Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes T von $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$?

86. A = (0|0) und die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$ bilden das Parallelogramm ABCD.

E ist der Mittelpunkt von $\overrightarrow{BC}$, F der von $\overrightarrow{CD}$.

Wie lauten die Koordinaten der Schnittpunkte T von $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$ und T_1 von $\overline{BD}$ und $\overrightarrow{AF}$? Lösung

87. A = (0|0|0) und die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}$ bilden den Quader mit der Grundfläche ABCD und der Deckfläche EFGH.

Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes T der Raumdiagonalen?

88.

Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = -\frac{\vec{a}}{2} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$

bilden das Trapez ABCD.

In welchem Verhältnis teilen sich die Diagonalen?

Lösung

89. Ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABC auch der Schwerpunkt des Dreiecks $M_aM_bM_c$, wenn dies die Seitenmitten von ABC sind?

90. In einem Dreieck ABC gehen von A und B aus Linien zu den jeweils gegenüberliegenden Seiten. Die Linien teilen sich im Verhältnis 3:1.
In welchem Verhältnis teilen sie die gegenüberliegenden Seiten? Lösung

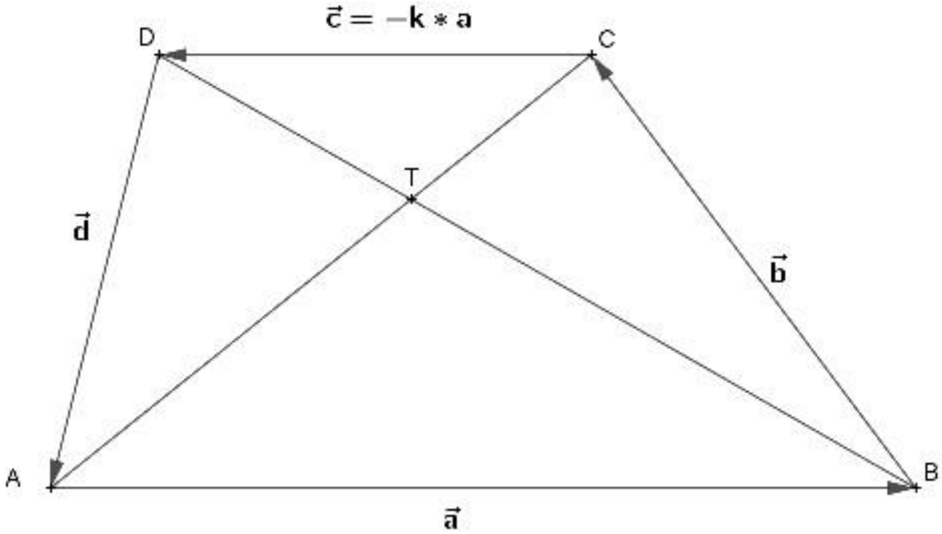
91. Im Parallelogramm ABCD teilt der Punkt E die Seite DC im Verhältnis 2:1, der Punkt F die Seite AB im Verhältnis 2:3.
In welchem Verhältnis teilen sich die Strecken BE und CF, wenn $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$?

92. Im Parallelogramm ABCD teilt der Punkt E die Seite DC im Verhältnis 2:1, der Punkt F die Seite AB im Verhältnis 2:3.
In welchem Verhältnis teilen sich die Strecken AE und DF, wenn $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$? Lösung

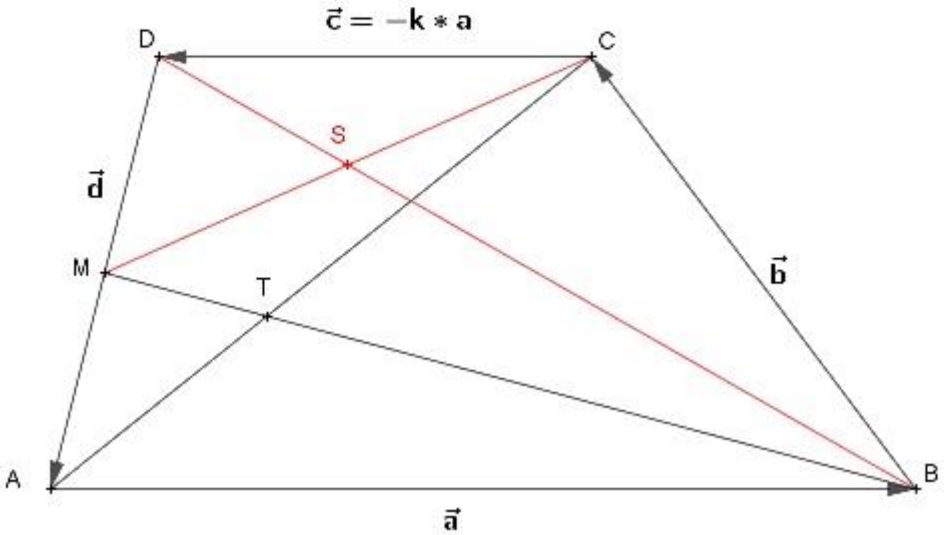
93. Im Parallelogramm ABCD teilt der Punkt E die Seite DC im Verhältnis 2:1, der Punkt F die Seite AB im Verhältnis 2:3.
In welchem Verhältnis teilt die Strecke AE die Strecke BD, wenn $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$?

94. Im Parallelogramm ABCD teilt der Punkt E die Seite DC im Verhältnis 2:1, der Punkt F die Seite AB im Verhältnis 2:3.
In welchem Verhältnis teilt die Strecke AC die Strecke EF, wenn $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$? Lösung

95. Für das Trapez gilt: $\vec{c} = -k * \vec{a}$. ($k > 0$)
In welchem Verhältnis teilt T die Diagonalen AC und BD?



96. Für das Trapez gilt: $\vec{c} = -k * \vec{a}$. (k > 0). M halbiert AD.
AC schneidet BM im Punkt T.
a) In welchem Verhältnis schneidet T die Strecke AC?
b) In welchem Verhältnis schneidet T die Strecke BM?
c) In welchen Verhältnissen schneiden sich BD und CM?
d) Was für eine Bedeutung haben die Fälle, wenn k = 1 oder k = 0?



Lösung

97. Für eine Strecke AB und einen Punkt T auf AB gilt:
$\overrightarrow{AT} = r * \overrightarrow{AB}$.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecke AB, wenn
a) r = 0,5
b) r = 2,5
c) r = -3
d) r = 0,9?

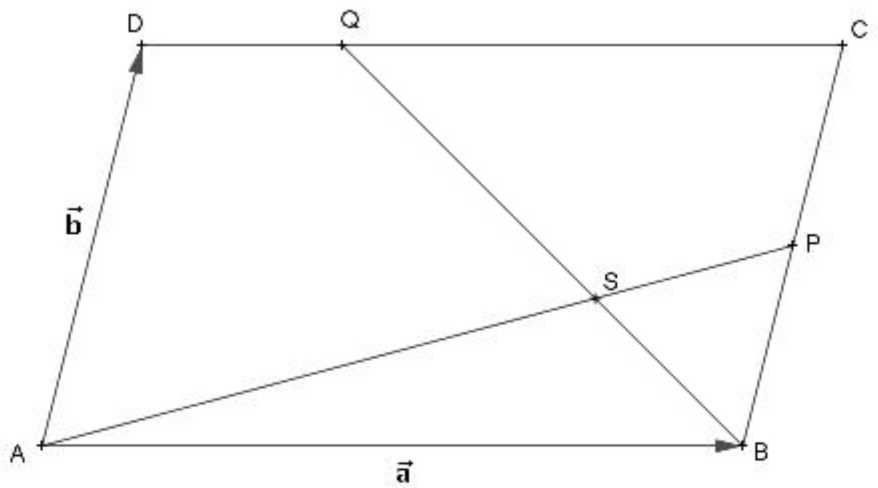
98. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke AB, wenn

a) A = (1||1|1), B = (5|13|17), T = (2|4|5)
b) A = (-1|0|2), B = (3|5|-2), T = (7|10|-6) Lösung

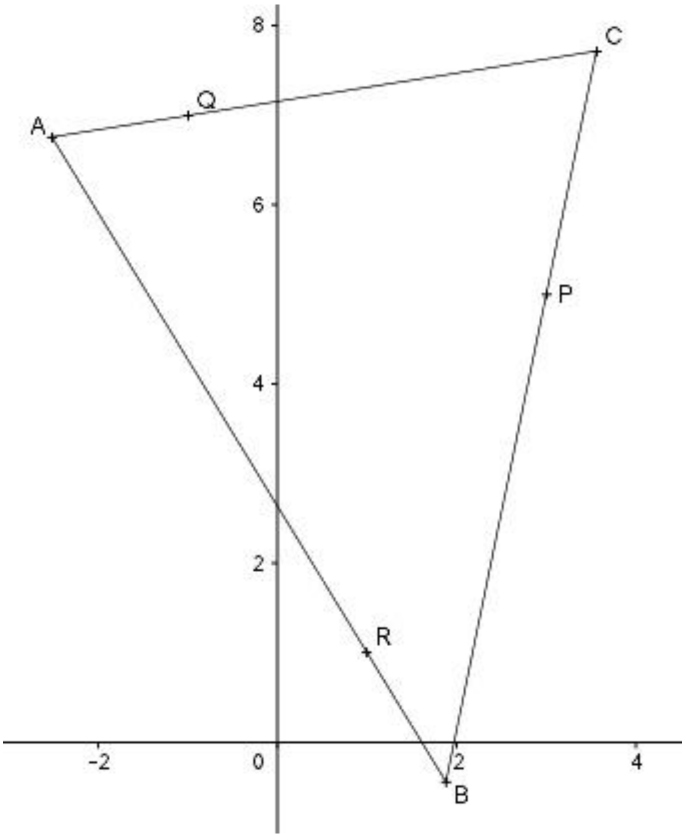
99. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T, der
a) AB im Verhältnis 1/3 teilt, wenn A = (1|2|-3)
und B = (5|4|7)
b) AB im Verhältnis - 0,75 teilt, wenn A = (8|5|9)
und B = (-3|7|-5).

100. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S
des Dreiecks ABC, wenn A = (1|0), B = (10|13)
und C = (-5|11).   Lösung

101. Q teilt die Strecke CD im Verhältnis t.
P ist der Mittelpunkt von BC.
In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AP in Abhängigkeit
von t?



102. In dem Dreieck ABC teilt P = (3|5) die Seite BC im Verhältnis 2:1,
Q = (-1|7) die Seite AC mit 3:1 und R = (1|1) die Seite AB mit 4:1.
Wie lauten die Koordinaten von A, B und C?
Lösung



103. In dem Dreieck ABC mit A = (2|2), B = (8|4) und C = (3|6) teilt E die Seite AB im Verhältnis 2:1 und S die Strecke CE im Verhältnis 3:1.
F ist der Schnittpunkt von AS mit BC.
In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AF und F die Strecke BC?

Lineare Abhängigkeit

104. Sind die Vektoren

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ linear abhängig? Lösung

105. Sind die Vektoren

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ linear abhängig?

106. Sind die Vektoren

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ linear abhängig? Lösung

107. Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} \text{ linear abhängig?}$$

108. Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}-3\\17\\18\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\9\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12\\-10\\9\end{pmatrix} \text{ linear abhängig?}$$ Lösung

109. Für welches a sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}3\\1\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix} \text{ linear abhängig?}$$

110. Für welches a sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a^2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ linear abhängig?}$$ Lösung

111. Für welches a sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}a\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\a\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3a\\1\\0\end{pmatrix} \text{ linear abhängig?}$$

112. Für welches a sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\a\\a^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\8\\18\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ linear abhängig?}$$ Lösung

113. Von den 4 Vektoren sind 3 linear unabhängig.
Welche sind es?
Stellen Sie den 4. als Linearkombination der 3 dar.

$$A=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$$

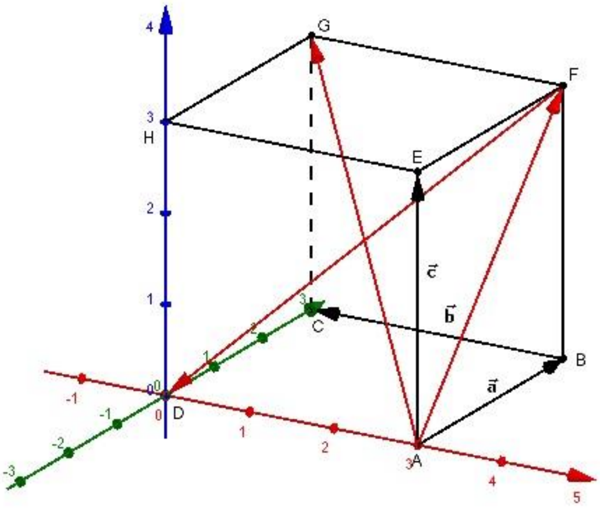
114. Von den 4 Vektoren sind 3 linear unabhängig.
Welche sind es?
Stellen Sie den 4. als Linearkombination der 3 dar.

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lösung

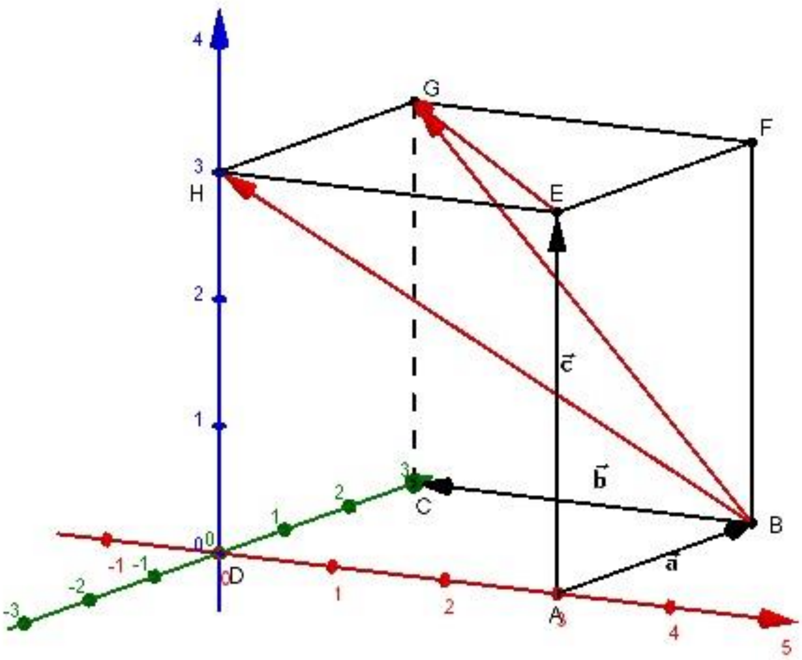
115. Liegen die Punkte A = (2|-5|0), B = (3|4|7), C = (4|-4|3) und D = (-2|10|5) in einer Ebene?

116. Liegen die Punkte A = (1|1|1), B = (5|4|3), C = (-11|4|5) und D = (0|5|7) in einer Ebene?
Lösung

117. Sind die Vektoren $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{FD}$ komplanar?

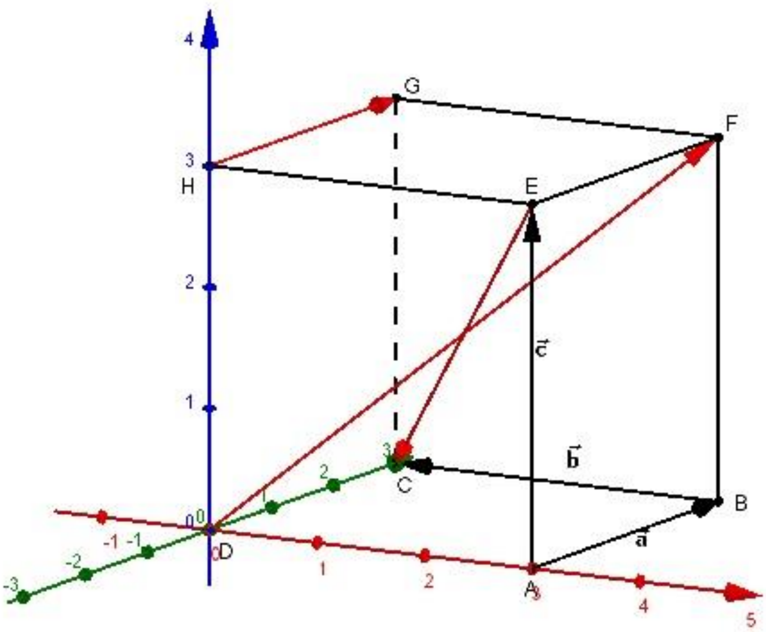


118. Sind die Vektoren $\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{BH}$ und $\overrightarrow{BG}$ komplanar?

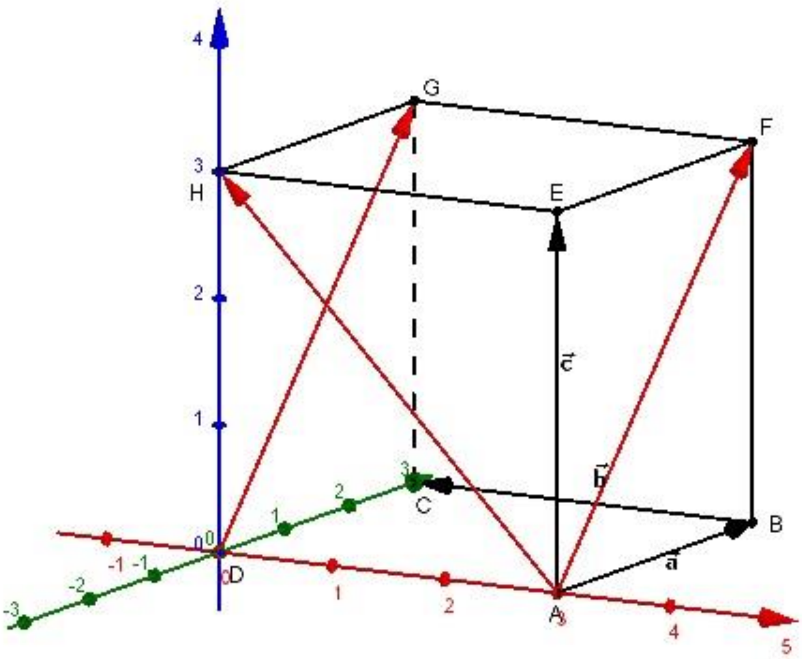


[Lösung]

119. Sind die Vektoren $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{DF}$ komplanar?



120. Sind die Vektoren $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DG}$ und $\overrightarrow{AF}$ komplanar?



Lösung

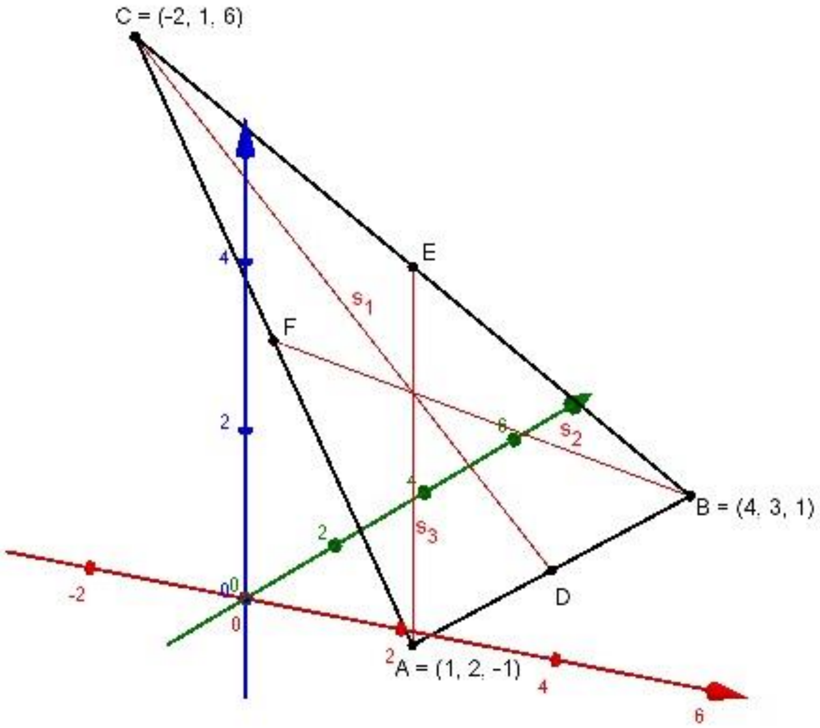
121. $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$. $t \neq 0$

a) Für welche t sind die 3 Vektoren linear unabhängig?
b) Für welche sind sie linear abhängig?
c) Zeigen Sie, wie sich der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugen lässt, wenn t = 1 ist.

122. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k^2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ k \end{pmatrix}$. $t \neq 0$

a) Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für k = 1 linear unabhängig?
b) Für welche k sind sie linear abhängig?
c) Zeigen Sie, wie sich der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$
aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugen lässt, wenn k = -1 ist.
Lösung

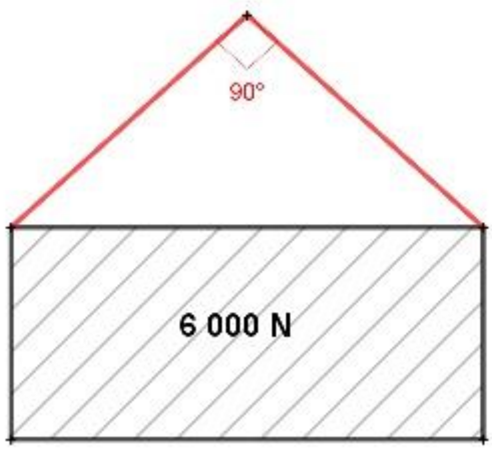
123. Berechnen Sie die Länge der Seitenhalbierenden s_1.



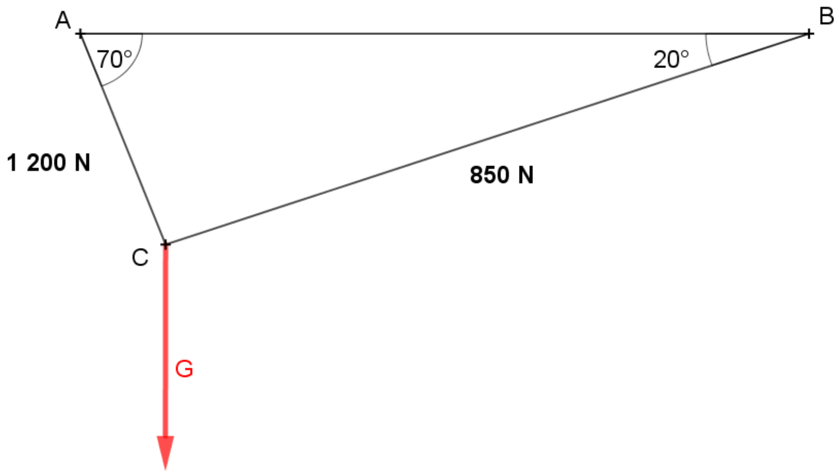
124. Für welches z ist B(3|2|z) 7 LE von A(1|-1|5) entfernt? [Lösung](#)

Komponentenzerlegung von Vektoren. Skalarprodukt.

125. Berechnen Sie, welche Kraft F in einem der roten Halteseile auftritt.

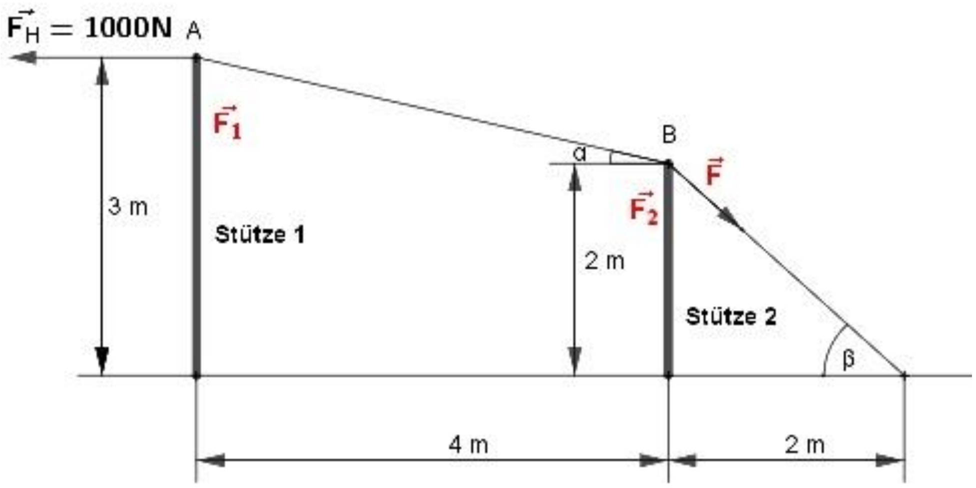


126. Welche Last G kann angehängt werden, wenn
a) im Seil AC maximal 1 200 N
b) im Seil BC maximal 850 N auftreten dürfen?

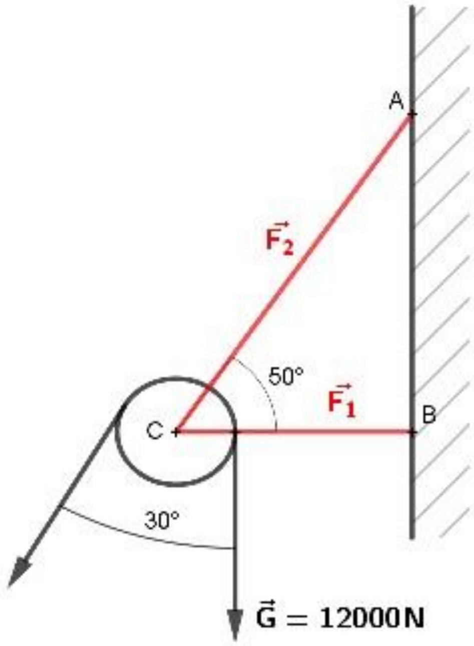


Lösung

127. Berechnen Sie die Druckkräfte $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ in den Stützen und die Seilkraft $\vec{F}$, die der Kraft $\overrightarrow{F_H}$ das Gleichgewicht hält. Die Spannseile sind in den Punkten A und B befestigt.



128. Wie groß sind die Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$ in den Streben CA und CB, wenn die Last G über eine Rolle hochgezogen wird?



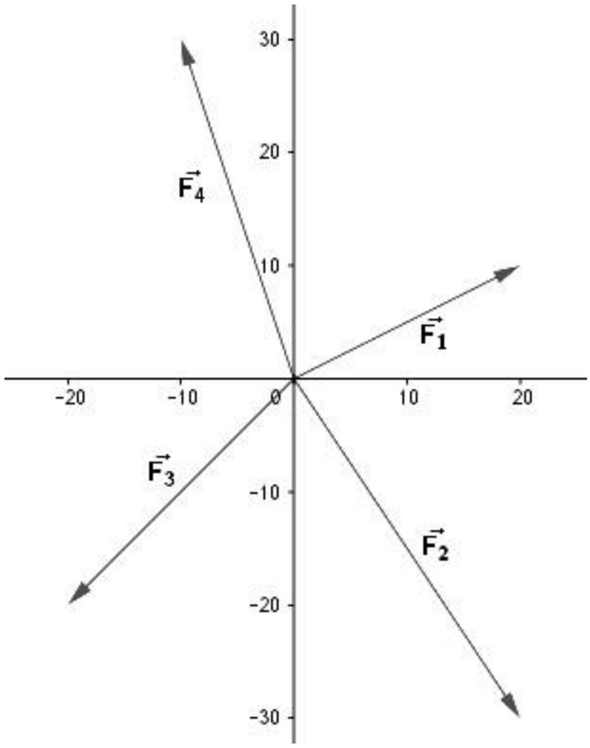
Lösung

129.

Die Kräfte $\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} N, \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} N, \overrightarrow{F_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} N, \overrightarrow{F_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix} N$ greifen an einem Punkt an.

a) Wie groß ist die resultierende Kraft $\overrightarrow{F_R}$?
b) Wie groß ist ihr Betrag?
c) Wie groß sind ihre Richtungswinkel?

130.



Die Kräfte greifen am Punkt (0|0) an.
a) Wie groß ist die resultierende Kraft $\overrightarrow{F_R}$?
b) Wie groß ist ihr Betrag?
c) Wie groß ist ihr Winkel α zur Vertikalen? Lösung

131. Eine Lampe mit einem Gewicht von 30 N hängt mittig über einer Straße. Ihre Haltedrähte bilden einen Winkel von 10° zur Waagerechten.
Wie groß ist die Zugkraft in einem Haltedraht?

132. Ein Motorboot will einen Fluß senkrecht mit einer Geschwindigkeit von 12 km/h überqueren. Es wird dabei mit einer Strömungsgeschwindigkeit von 8 km/h abgelenkt.
a) Wie groß ist die tatsächliche Querungsgeschwindigkeit und die Fahrtrichtung des Bootes?
b) Unter welchem Winkel α müsste es sich entgegen der Strömung stellen, um senkrecht ans andere Ufer zu kommen, und mit welcher Geschwindigkeit würde es den Fluss queren?
Lösung

133. An einem 10 cm langen Pendel hängt ein Gewicht G von 6 N.
a) Wie groß ist die Teilkraft F_1 senkrecht zum Pendel und F_2 in Pendelrichtung, wenn es um 45° ausgelenkt ist?
b) Wie groß ist der Auslenkungswinkel α, wenn F_2 = 5 N?
c) Welches Gewicht hat das Pendel, wenn bei einem Auslenkungswinkel von 30° F_1 = 3 N ist?
Wie groß ist dann F_2?

134. Ein Flugzeug fliegt von Nord nach Süd mit einer Geschwindigkeit v von 300 km/h. Um wieviel Grad muss es seinen Kurs ändern, wenn Wind aus Südwest mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h auftritt? Mit welcher Geschwindigkeit v' fliegt es dann weiter in Nord-Süd-Richtung?
Lösung

135. Berechnen Sie die Länge der Winkelhalbierenden w_γ im Dreieck mit A = (0|0), B = (12|-9) und C = (12|16).

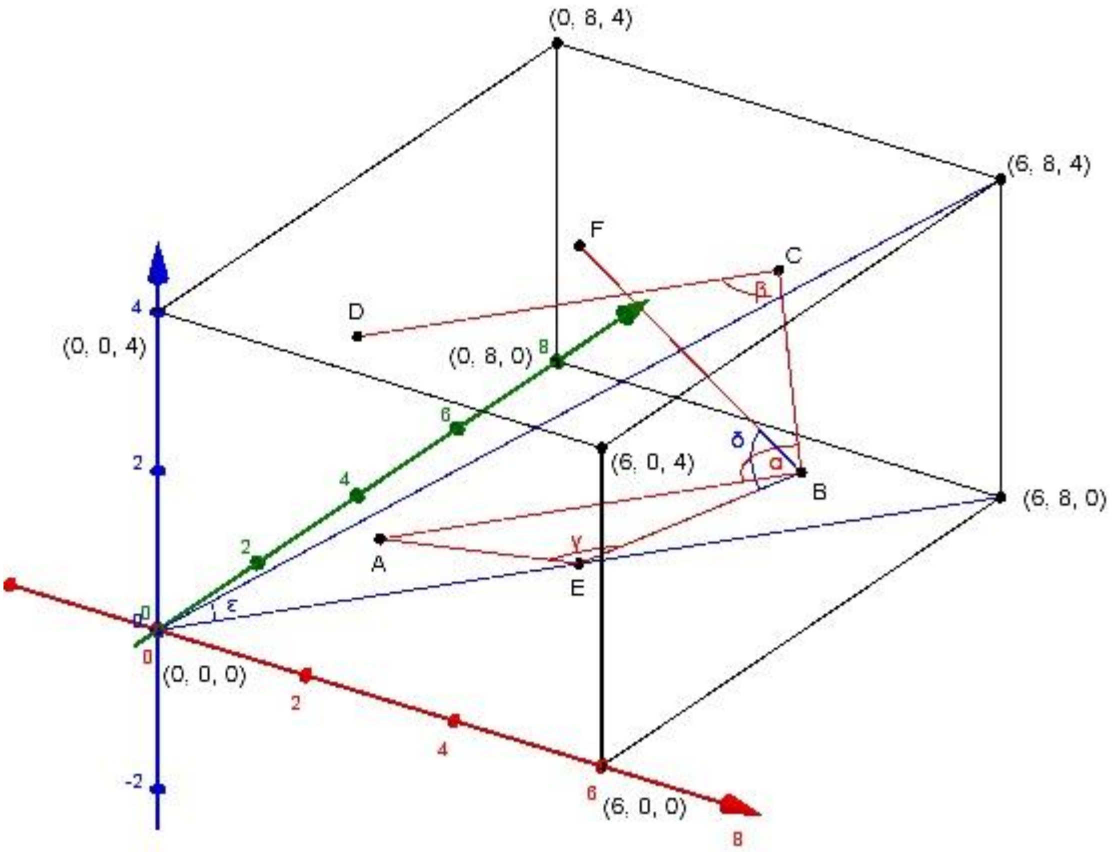
136. Sind die Vierecke
a) $ABCD_1$ mit A = (2|0|0), B= (6|4|7), C = (8|9|3),
D_1 = (12|12|-1)
b) $ABCD_2$ mit D_2 = (14|4|3) eben? Lösung

137. Berechnen Sie die Koordinaten des Fußpunktes D der Höhe von A auf BC im Dreieck mit A = (1|2),
B = (2|9) und C = (-4|4).

138. Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC, wenn A = (1|-2|5), B = (3|7|2) und C = (1|5|1). Lösung

139. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt A der Pyramide ABCS, wenn A = (1|0|0), B = (0|5|0), C = (-3|1|1) und
S = (-1|2|4).

140. A, B, C, D, E und F sind die Mittelpunkte der Flächen des Quaders. Berechnen Sie den Winkel
a) α zwischen AB und BC
b) β zwischen BC und CD
c) γ zwischen AE und EB
d) δ zwischen EB und BF
e) Berechnen Sie vom Koordinatenursprung aus den Winkel ε zwischen der Flächendiagonalen der Grundfläche und der Raumdiagonalen.



Lösung

141. Die Punkte A = (1|1|1), B = (2|3|4) und C = (4|2|3) bilden ein Dreieck.
Wie groß
a) sind seine Innenwinkel?
b) ist Flächeninhalt?

142. Die Punkte A = (0|1|-1), B = (4|4|0) und C = (-3|5|2) bilden ein Dreieck.
a) Projizieren Sie das Dreieck ABC in die x,y-Ebene.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C'.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt F' von A'B'C'.
c) Um wieviel Prozent ist der Flächeninhalt F von ABC größer als F'? Lösung

143. Ein Viereck wird gebildet durch die Punkte A = (-2|4|6), B = (6|4|4), C = (4|0|8) und D = (8|0|7).
Berechnen Sie seinen Flächeninhalt A.

144. Die Punkte O = (0|0|0), A = (-2|-3|2) und C = (3|-4|-3) bilden ein Dreieck.
a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck rechtwinklig ist.
b) Wie lauten die Koordinaten eines Punktes B, der das Dreieck zu einem Rechteck ergänzt?

c) Berechnen Sie die Flächeninhalte des Rechtecks und des Dreiecks.
d) Projizieren Sie das Rechteck auf die y, z-Ebene, und geben sie die Koordinaten von A', B' und C' an.
e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des projizierten Rechtecks, und geben Sie an, um wieviel Prozent er sich sich gegenüber dem ursprünglichen verkleinert hat. Lösung

145. Die Punkte A = (2|4|5), B = (0|0|5) und C = (4|0|5) bilden ein Dreieck.
Projizieren Sie das Dreieck ABC in die x,y-Ebene.
Die Dreiecke A'B'C' und ABC bilden ein Dreieckprisma mit A'B'C' als Grundfläche und ABC als Deckfläche.
Berechnen Sie die Oberfläche O des Prismas.

146. Eine Pyramide hat eine Grundfläche mit A = (0|0|-2), B = (6|2|-2), C = (4|5|-2) und D = (1|4|-2) sowie ihre Spitze S = (0|0|4).
Berechnen Sie
a) die Koordinaten des Schnittpunktes B' der Körperkante BS mit der x, y-Ebene
b) ihr Volumen. Lösung

147. Eine Pyramide hat eine Grundfläche mit A = (4|6|0), B = (0|7|0), und C = (0|0|0) sowie ihre Spitze S = (2|4|6).
Berechnen Sie
a) den Flächeninhalt A der Grundfläche ABC
b) den Flächeninhalt A' der Seitenfläche ABS
c) ihr Volumen V
d) ihr Volumen V', wenn die Spitze nach S' = (2|4|3) verschoben wurde.

Gerade

148. Eine Gerade geht durch die Punkte P_1 = (-1|2) und P_2 = (1|-2).
Wie lautet
a) deren Parameterform
b) deren Normalform? Lösung

149. Eine Gerade geht durch die Punkte P_1 und P_2, die durch ihre Ortsvektoren $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben sind.
Wie lautet
a) deren Parameterform
b) deren Normalform?

150. Wie lautet die Gleichung der Geraden g, die durch

$P_1 = (4|-1|3)$ und $P_2 = (7|1|-2)$ geht.
Liegen die Punkte $P_3 = (1|-3|8)$ und $P_4 = (7|2|-2)$ auf dieser Geraden.
Wie lauten die Koordinaten der Durchstoßpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen? Lösung

151. Eine Gerade geht durch die Punkte P_1 und P_2, die durch ihre Ortsvektoren $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben sind.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Duchstoßpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen.

152. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte $A = (3|y|z)$, $B = (x|2{,}5|z)$ und $C = (x|y|-1)$ so, dass die Punkte auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen.
Lösung

153. Beschreiben die beiden Geradengleichungen dieselbe Gerade?

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix} + \varphi * \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

154. Wie lautet die Parameterform der Geraden
a) g_1, die parallel zu der Geraden g_2, bestimmt durch die Punkte $P_1 = (7|-1|2)$ und $P_2 = (1|0|-2)$, verläuft und durch den Punkt $P_3 = (-1|1|-2)$ geht.
b) g_3, die durch $(0|0|0)$ geht und parallel zur Geraden g_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ verläuft.
c) g_5, die parallel zu g_2 verläuft und durch einen Punkt T auf g_4 geht, der durch $\lambda = -2$ festgelegt ist. Lösung

155. Berechnen Sie die Schnittpunktkoordinaten der beiden Geraden:
g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

156. Berechnen Sie die Schnittpunktkoordinaten der beiden Geraden:

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung

157. Stellen die beiden Geradengleichungen

g_1: 3x + 2y = 8 und g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

dieselbe Gerade dar?

158. Wie liegen die beiden Geraden zueinander?

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung

159. Wie liegen die beiden Geraden zueinander?

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

160. Wie liegen die beiden Geraden zueinander?

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung

161. A = (3|3|6), B = (5|0|2) und C = (1|4|6) bilden das Dreieck ABC.
Liegt eine der Dreieckseiten auf der Geraden g oder verläuft sie parallel dazu?

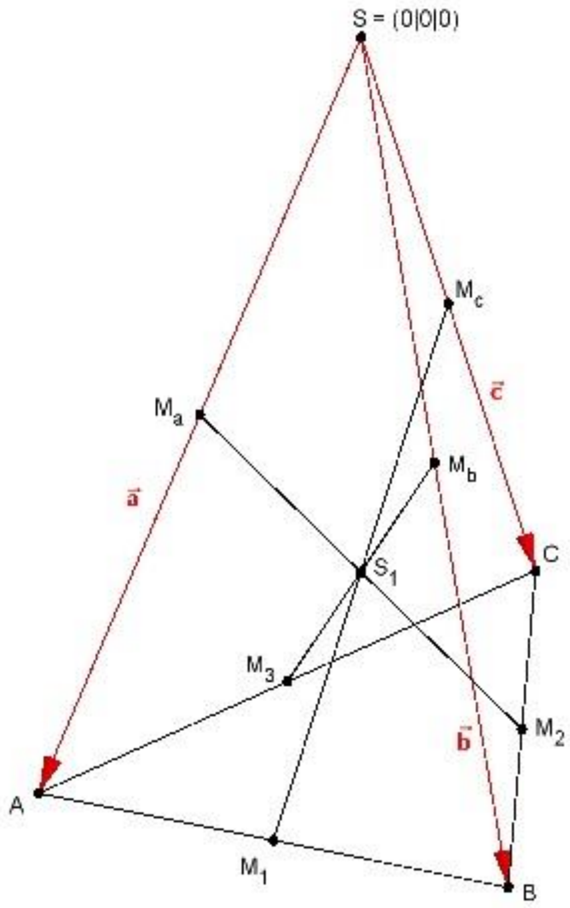
162. Die Schnittpunkte der Geraden g_1, g_2 und g_3 bilden das Dreieck ABC.

g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
g_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$,

Berechnen Sie die Koordinaten von A, B und C.

Lösung

163.



M_a, M_b, M_c, M_1, M_2 und M_3 sind die Mitten der zugehörigen Tetraederseite.

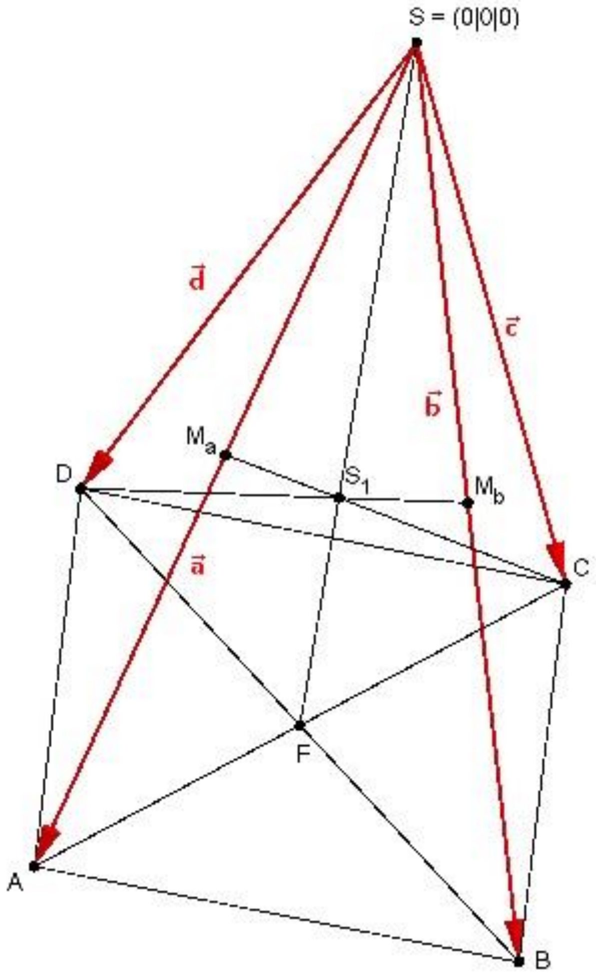
a) Wie lauten die Geradengleichungen der Geraden g_1 durch M_a und M_2, g_2 durch M_b und M_3 und g_3 durch M_c und M_1?

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S_1 von g_1 und g_2.

c) In welchem Verhältnis teilt S_1 die Strecken M_aM_2 und M_bM_3?

d) Liegt S_1 auf g_3?

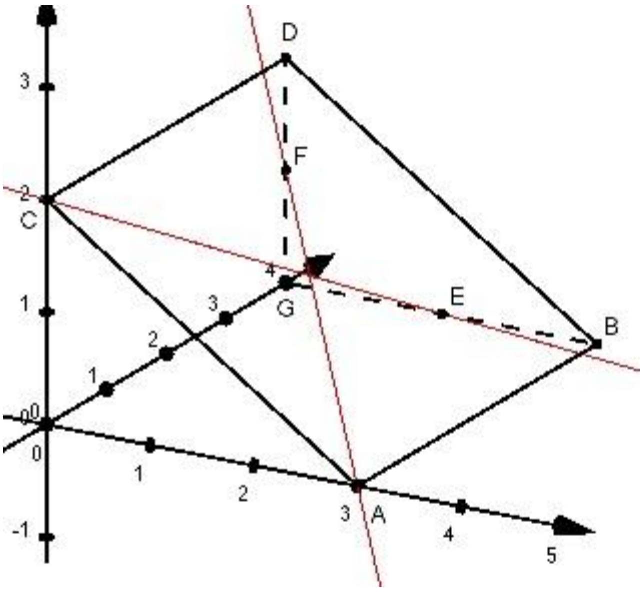
164.



M_a, und M_b sind die Mitten der zugehörigen Seiten einer schiefen Pyramide mit einem Parallelogramm als Grundfläche.
a) Wie lauten die Geradengleichungen der Geraden g_1 durch M_a und C und g_2 durch M_b und D?
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S_1 von g_1 und g_2.
c) In welchem Verhältnis teilt S_1 die Strecken M_aC und M_bD?
d) Liegt S_1 auf der Geraden g_3 durch S und F? Lösung

165. Wie lautet die Parameterform der Geraden, die beschrieben wird durch
a) $2x + y = 1$
b) $x - y = 3$
c) $y = 3$

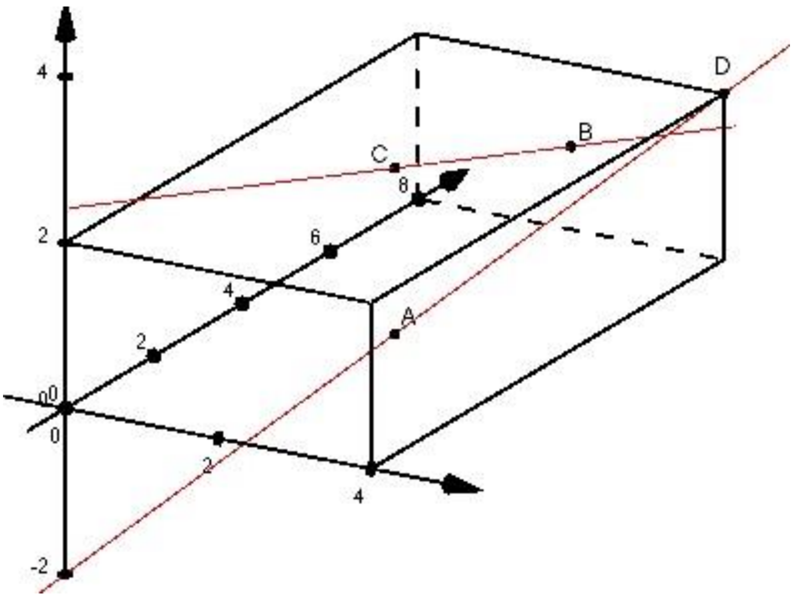
166.



E und F sind Seitenmitten.

Schneiden sich die beiden Geraden durch A und F und durch C und E? Lösung

167.



A, B und C sind die Schnittpunkte der Diagonalen der entsprechenden Seitenflächen.

Schneiden sich die beiden Geraden durch A und D und durch B und C?

168. Fähre F_1 fährt mit konstanter Geschwindigkeit in 40 Minuten auf kürzestem Weg von A(16|4) nach B(12|20). Fähre F_2 fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von

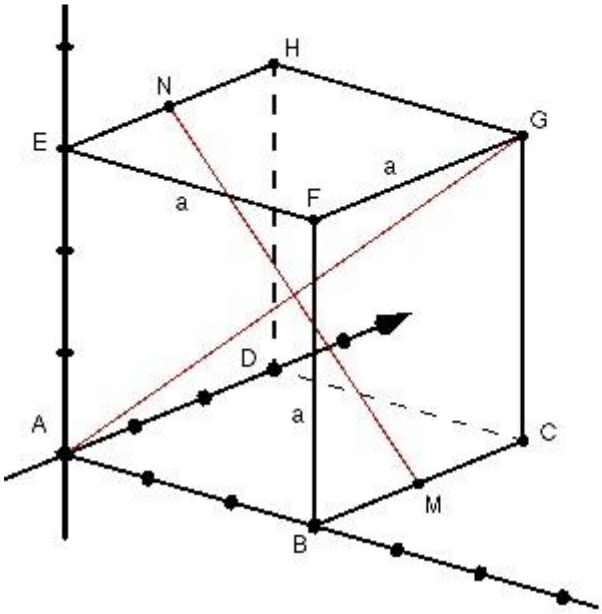
25 km/h auf kürzestem Weg von C(4|0) nach D(24|15).
Die Strecken AB und CD (Angaben in km) kreuzen sich.
Nach wieviel Minuten sind sich die beiden Fähren am nächsten, wenn sie zur selben Zeit losfahren?
Wie weit sind sie dann voneinander entfernt? Lösung

169. Eine Drohne startet in Punkt A = (2|5|0), bewegt sich danach geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit und hat nach 1 Stunde Punkt B = (4|8|1) erreicht.
Ein Motorflugzeug befindet sich beim Start der Drohne im Punkt C = ((10|15|1) und fliegt von dort geradlinig mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(Punktkoordinaten in km).
Wieviel Minuten nach dem Start sind sich Drohne und Flugzeug am nächsten?
Wie weit sind sie dann voneinander entfernt?

170. Die Punkte A = (3|4|5), B = (5|6|6), C = (8|6|6) bilden ein Dreieck.
a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass eine Raute entsteht.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M der Raute.
Auf dem Punkt M steht eine Gerade g mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ senkrecht. Die Spitzen von Pyramiden mit der Raute als Grundfläche liegen auf g.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten von Spitzen so, dass die Pyramiden eine Höhe von 10 LE haben.
Lösung

171. Eine Kugel bewegt sich geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h auf der Geraden durch die Punkte A = (1|2|4) und B = (3|4|5). (Angaben in km).
In welchem Punkt P befindet sie sich nach 30 Minuten, wenn sie in A startet?

172.



Der Würfel hat eine Kantenlänge a.
Berechnen Sie die Punktkoordinaten des Schnittpunktes S der Raumdiagonalen AG mit der Strecke MN, wenn M und N Seitenmitten sind.
Lösung

173. Die Punkte A = (3|-3|0), B = (3|3|0) und C = (-3|3|0) bilden ein Dreieck.
a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass daraus ein Quadrat wird.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S_1 der Geraden g, die durch S = (0|0|4) und C geht und g_1, die durch A und B geht.

174. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g_1, die die Gerade g: y = 2x - 4 im Punkt A = (3|y) orthogonal schneidet.
Lösung

175. Bestimmen Sie eine Koordinaten- und eine Parameterdarstellung der Geraden, die durch die Punkte A = (3|2) und B = (-1|-5) geht.

176. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g', wenn die Gerade g:$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, gespiegelt wird
a) am Koordinatenursprung
b) am Punkt P = (2|-1)
c) an der x-Achse
d) an der y-Achse. Lösung

177. Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des

Punktes P = (1|-2|1) von der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

178. Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des Koordinatenursprungs von der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Lösung

179. Welche Beziehung muss zwischen a und b bestehen, damit sich

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

schneiden?

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S in Abhängigkeit von a.

180. a) Bestimmen Sie a von P = (-8|1+3a|-4) so, dass P auf der Geraden g durch A = (1|4|5) und B = (-2|7|2) liegt.
b) Bestimmen Sie die Spurpunkte von g in den Koordinatenebenen.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M von AB.
d) Bestimmen Sie die Koordinaten von 3 Punkten auf AB so, dass AB in 4 gleiche Teile geteilt wird.
Lösung

181. Ein Parallelogramm ist bestimmt durch die Punkte A = (6|3|3), B = (10|9|3), C = (7|10|3) und D = (3|4|3).
a) Berechnen Sie seine Innenwinkel.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A'B'C'D', die durch die Projektion der Punkte A, B, C, D in die x, y-Ebene entstehen.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von A'C und B'D.
d) Unter welchem Winkel schneiden sich A'C und B'D?
e) Liegt S auch auf BD'?
f) Bestimmen Sie das Volumen V des Prismas mit A'B'C'D' als Grund- und ABCD als Deckfläche.

182. Ein gleichschenkliges Trapez ist bestimmt durch die Punkte A = (10|0|0), B = (10|10|0), C = (7|7|4) und D = (7|3|4).
a) Berechnen Sie den Innenwinkel α im Punkt A.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Trapezes.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes E der Geraden g duch A und und h durch B und C.
d) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A', B', C' und D' an, wenn A, B, C und D in die y, z-Ebene projiziert werden.
e) Bestimmen Sie den Winkel α' in A', und berechnen Sie den Flächeninhalt des projizierten Trapezes.
Lösung

183. Die Gerade g geht durch A = (4|-2|2) und B = (2|2|1), die Gerade g_1 durch A und C = (4|1|6).
a) Berechnen Sie den Schnittwinkel α zwischen g und g_1.
b) Das Dreieck ABC wird in die x,y-Ebene projiziert. Berechnen Sie den Flächeninhalt A des projizierten Dreiecks A'B'C'.
c) Eine Pyramide hat die Spitze S = (3|0|6) und das Dreieck A'B'C' als Grundfläche.
Berechnen Sie sein Volumen V.

Skalarprodukt

184. Berechnen Sie den Winkel φ zwischen den Vektoren

a) $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ (22,84°) b) $\begin{pmatrix}13\\12\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}12\\-13\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$ (53,13°) d) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ Lösung

185. Wie lang sind die Seiten, und wie groß sind die Winkel im Dreieck ABC mit A = (2|1), B = (5|-1) und C = (4|3)?

186. Wie lang sind die Seiten, und wie groß sind die Winkel im Dreieck ABC mit A = (5|5|3), B = (3|5|5) und C = (5|1|5)?
Lösung

187. Für welche Koordinaten a, b, c gilt: $\vec{a} \perp \vec{b}$?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}a\\-4\end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\b\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

188. Die Punkte A = (4|3|2), B = (-3|2|1) und
C = (-2|0|-4) bestimmen das Dreieck ABC.
a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass ein Rechteck entsteht.
b) Wie lang sind die Rechteckseiten?
c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Diagonalen-schnittpunktes S.
d) Unter welchem Winkel schneiden sich die Koordinaten?
Lösung

189. Für welches c wird das Dreieck ABC mit
A = (1|1|3), B = (2|0|5) und C = (4|c|3)
a) bei A rechtwinklig?
b) Wann bei B?

190. Sind die beiden Geraden orthogonal?

a)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$ Lösung

191. Die Punkte A = (-3|2|-1), B = (-1|3|2) C = (8|0|4) und D = (6|-1|1) bilden ein Viereck.
Ist es ein Quadrat, eine Raute, ein Rechteck oder ein Parallelogramm?

192. Die Punkte A = (4|-1|3), B = (2|3|0) C = (5|6|2) und D = (7|2|5) bilden ein Viereck.
Ist es ein Quadrat, eine Raute, ein Rechteck oder

ein Parallelogramm? Lösung

193. Die Punkte A = (3|1|-5), B = (1|3|-4) C = (1|0|-4) und D = (3|-2|-5) bilden ein Viereck.
Ist es ein Quadrat, eine Raute, ein Rechteck oder ein Parallelogramm?

194. Berechnen Sie b, wenn die Strecke AB eine Länge von 5 LE hat und A = (6|2) und B = (b|-2) betragen.
Lösung

195. Welche Punkte auf der x-Achse sind vom Punkt A = (2|3) 5 LE entfernt?

196. Welche Punkte auf der x-Achse bzw. y-Achse sind von den Punkten A = (-2|5) und B = (-4|-1) gleich weit entfernt? Lösung

197. Berechnen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunktes M des Dreiecks ABC mit A = (2|8), B = (-1|-1) und C = (6|0).

198. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Kugel, die durch die Punkte A = (1|-4|2), B = (7|5|5), C = (4|-3|0) und D = (-1|0|-4) geht. Lösung

199. Steht die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf der Ebene

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -13 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht?

200. Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes S von P = (4|-1|2) aus

auf die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösung

201. Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes S von P = (3|-11) aus

auf die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

202. Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes S von P = (2|-7|-2) aus

auf die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lösung

203. Bestimmen Sie den Winkel α zwischen den Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Welche Winkel bildet $\vec{a}$ mit den Koordinatenachsen?

204. Die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ N verschiebt einen Körper von Punkt
P_1(-2|4|1) m nach P_2(5|1|2) m. Berechnen Sie
a) die Länge l der Verschiebung.
b) den Betrag der Kraft $\vec{F}$
c) den Winkel α zwischen der Kraft und ihrem Verschiebeweg
d) die aufgewendete Arbeit W am Körper. Lösung

205. Die Punkte A = (-6|1), B = (4|1) und C = (x|5) legen Dreiecke ABC fest. Bestimmen Sie C so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

206. Die Punkte A = (x|4), B = (5|6) und C = (-1|8) legen Dreiecke ABC fest. Bestimmen Sie A so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Lösung

207. Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes B, der zum einen auf der Geraden g mit y = 0,125x - 2 liegt,
a) zum anderen auf der Senkrechten zur Strecke AC mit A = (-2|1) und C = (1|3) durch den Punkt A.
b) zum anderen auf der Senkrechten zur Strecke AC durch den Punkt C.
c) zum anderen auf der Senkrechten zur Geraden g durch den Punkt A.

208. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B, der auf der Geraden g mit

$y = -\frac{1}{3}x + 1,5$ liegt und im rechtwinkligen Dreieck ABC mit

A = (5|-3) und C = (1|2) und α = 90° Eckpunkt ist. Lösung

209. Die Strecke von A = (-2|-3) nach B = (4|0) bildet
die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ABC. BC schließt

mit der positiven x-Achse einen Winkel von 143,13° ein.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C.

210. A (1,5|0,5) ist ein Eckpunkt des Quadrates ABCD, dessen Punkte C und D auf der Geraden g: y = -0,2x + 6 liegen. Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt A und die Koordinaten von B und C. Lösung

211. Berechnen Sie den Abstand des Punktes A (3|4) von der Geraden g: y = 0,5x - 1.

212. Berechnen Sie den Abstand a des Punktes A(x|-1) von seinem Lotfußpunkt C(2|-3) auf der Geraden g: y = -0,5x - 2.
Lösung

213. Bestimmen Sie die Koordinaten von 4 Punkten C auf der Geraden g: y = 0,5x + 2,25 so, dass das Dreieck ABC mit A(-4|-2) und B(4|0) rechtwinklig ist.

214. Bestimmen Sie den Abstand a der beiden Geraden

g: $y = -\frac{2}{3}x - 1$ und h: $y = -\frac{2}{3}x + 3$. Lösung

215. Vom Dreieck ABC sind bekannt B(4|0), C(-2|4) und der Fußpunkt D(-0,5|3) der Höhe h (Länge 3,6) von A auf BC. Bestimmen Sie die Koordinaten von A.

216. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C und D des Rechtecks ABCD mit A(-4|1), B(2|-3,5) und AD = 3,75 LE.
Lösung

217. Bestimmen Sie den Wert für α zwischen 0° und 360°, für den das Dreieck ABC, bestimmt durch die Vektoren
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 180° + \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ und A(2|0) bei A rechtwinklig ist.

218. Die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 * \sin\alpha \\ 3 * \cos^2\alpha \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 * \cos\alpha \\ \frac{2}{\sin\alpha} \end{pmatrix}$
legen für 0° < α < 180° Parallelogramme fest.
Bestimmen Sie den Trägergraphen g für die Punkte A.
Für welche α entsteht ein Rechteck?
Lösung

219. Dreiecke ABC sind durch A((-2|0), B(6|2) und C(x|5) festgelegt. Bestimmen Sie die Koordinaten von C, wenn gilt: Winkel α = 45°.

220. Die Ortsvektoren $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3-x \\ 2x \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und der Koordinatenursprung O legen Dreiecke AOB fest.
Bestimmen Sie x, wenn der Winkel AOB = 60°. Lösung

221. Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden g:y = 0,2x + 4 und h:y = -0,8x + 1.

222. Die beiden Geraden g:y = 0,5x + 1 und h:y = mx + 6 schließen einen Winkel von 45° ein.
Bestimmen Sie die Steigung von h. Lösung

223. Bestimmen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte von Kreisen mit dem Radius 3,5 LE, die die Gerade g:y = -0,25x + 3 im Punkt A(2|2,5) berühren.

224. Punkte C eines Dreiecks ABC liegen auf der Geraden g:y = -0,5x + 5. Bestimmen Sie die Koordinaten von C wenn A(0|1) und B(6|-1) und
a) der Winkel BAC = 90°
b) der Winkel BAC = 45°. Lösung

225. Für das gleichschenklige Dreieck ABC gilt:
A(-1|-2), B(7|-1) und α = β = 55°.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C.

226. Vom Drachen ABCD sind bekannt: A(-2|-3), C(6|-1), der Schnittpunkt E(0|-2,5) der Diagonalen und der Winkel BAD = 80°.
Bestimmen Sie
a) die Koordinaten der Punkte B und D(0,42|-4,18)
b) die Größe des Winkels ABC. Lösung

227. Für Parallelogramme ABCD gilt: A(-3|4), C(5|2), B und D sowie der Diagonalenschnittpunkt M liegen auf der Geraden g:y = 2x + 1 mit x < 1.
Bestimmen Sie
a) die Winkel ACB und CBD wenn x = 0.
b) die Koordinaten des Punktes B, wenn aus dem Parallelogramm ein Rechteck wird.

228. Der Punkt C von Dreiecken ABC liegt auf der Funktion f:y = $1,5^{x-2}$ + 1. Der Punkt A(x_A|0) hat eine Abszisse, die um 1 kleiner ist als die von C. B(x_B|0) liegt 5 LE von A entfernt.
Bestimmen Sie
a) die Winkel im Dreieck $A_1B_1C_1$ wenn x = 1.
b) die Koordinaten des Punktes C, wenn AB die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist. Lösung

229. Kreise mit dem Radius 2 LE haben die Gerade
g: y = -3x - 2 als Tangente. Bestimmen Sie
a) die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise, die die Gerade im Punkt A(0|-2) berühren.
b) den Trägergraphen für die Mittelpunkte dieser Kreise.

230. Dreiecke ABC sind festgelegt durch A(0|0),

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 * \cos\alpha \\ -4 * \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 * \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq 180°.$$

a) Berechnen Sie die Länge von AB.
b) Berechnen Sie, für welche Winkel α Dreiecke mit der Basis BC gleichschenklig sind.
c) Berechnen Sie, für welche Winkel α der Winkel BAC 90° beträgt.
d) Für welchen Winkel α beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks 8 FE?
e) Wie groß kann der Flächeninhalt minimal oder maximal werden? Lösung

231. Parallelogramme ABC sind festgelegt durch A(-2|-3),

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 * \sin\alpha + 1 \\ 6 * \cos^2\alpha \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 * \sin\alpha \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq 180°.$$

a) Berechnen Sie den Winkel BAD = φ, wenn α = 9o°.
b) Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen für die Punkte D.
c) Welche Werte kann x_B annehmen?
d) Bestimmen Sie den Trägergraphen für die Punkte C und deren Koordinaten in Abhängigkeit von α.
e) Für welche α wird aus dem Parallelogramm ein Rechteck?
f) Berechnen Sie den minimalen und maximaln Flächeninhalt des Parallelogramms.

232. Ein Würfel ist durch die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ festgelegt.}$$

Berechnen Sie den kleineren Winkel α, den 2 Raumdiagonalen einschließen. Lösung

233. Ein Quader hat eine Grundfläche von 6 cm x 6 cm und eine Höhe von 3 cm. Berechnen Sie
a) die Winkel α und β zwischen zwei Raumdiagonalen
b) den Winkel γ zwischen einer Raumdiagonalen und einer Seitenkante.

234. Berechnen Sie die Länge der Projektion des Vektors $\overrightarrow{AB}$ auf den Vektor $\overrightarrow{AC}$ wenn:
a) A(0|0, B(3|4), C(5|1)
b) A(0|0), B(-4|1), C(3|3)
c) A(4|3), B(-2|1), C(-4|5)
d) A(2|-3), B(5|-1), C(-2|3) Lösung

235. Die Geraden bilden ein Dreieck.

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wie groß sind seine Winkel α, β und γ?

236. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erzeugen einen Würfel. Berechnen Sie
a) den Winkel α zwischen einer Flächendiagonalen und einer Seitenkante.
b) den Winkel β zwischen einer Raumdiagonalen und einer Seitenkante.
c) den Winkel γ zwischen einer Raum- und einer Flächendiagonalen.
d) den Winkel δ zwischen einer Raumdiagonalen und der Verbindung gegenüberliegender Seitenmitten.
Lösung

237. Die Punkte A(0|8), B(3|-1) und C(7|7) bilden das Dreieck ABC.
a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M seines Umkreises.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Fußpunkte F vom Koordinatenursprung aus auf die Verbindungsgeraden AB, AC und BC.
c) Die Fußpunkte liegen auf der Geraden g.
Wie lautet deren Gleichung in der Normalform?

Geraden und Ebenen

238. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform durch die Punkte
a) P(1|1|-2), Q(3|-2|1) und R(-1|1|-2).
b) P(0|-1|2), Q(1|0|-3) und R(2|-1|-2) Lösung

239. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in allgemeiner Form für
a)
$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
b)
$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

240. Bestimmen Sie eine Parametergleichung für die Ebenen

a) x + y + z = 3
b) x + z = -5 Lösung

241. Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der Koordinatenachsen mit der Ebene $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P (1|y|-1) so, dass er in ε liegt.

242. Bestimmen Sie Parametergleichungen für alle Flächen eines Quaders, der von den Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Lösung

243. Die Punkte A(2|3|5), B(0|5|10), C(3|4|6) und D(5|0|2) bilden das
Viereck ABCD.
a) Liegt das Viereck ABCD in einer Ebene?
b) Wie liegen die beiden Geraden durch die Mittelpunkte von AB und BC sowie von AD und DC zueinander?

244. Die Ebene $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

Bestimmen Sie die Lage der Geraden zur Ebene. Lösung

245. Die Ebene $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

Bestimmen Sie die Lage der Geraden zur Ebene.

246. Die Ebene $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

Bestimmen Sie die Lage der Geraden zur Ebene. Lösung

247. Die Ebene $\varepsilon_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$\varepsilon_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

Bestimmen Sie die Lage der beiden Ebenen zueinander.

248. Die Ebene $\varepsilon_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$\varepsilon_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

Bestimmen Sie die Lage der beiden Ebenen zueinander.
Lösung

249. Die Ebene $\varepsilon_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$\varepsilon_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind gegeben.

Bestimmen Sie die Lage der beiden Ebenen zueinander.

250. Wie lauten die Gleichungen der Schnittgeraden der Ebene

$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenebenen?

Lösung

251. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene ε in Parameterform,

in der die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt P(7|1|-1) liegen.

Liegt der Punkt Q(0|2|3) auch in der Ebene? (Nein)

252. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene ε in Parameterform durch die Punkte A(6|6|0), B(0|10|0) und C(0|0|6).
a) Liegt der Punkt D(8|0|4) in der Ebene?
b) Bestimmen sie die Lage von ε zur Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
c) Ermitteln Sie die Gleichung der Schnittgerade h von ε und der Ebene φ durch die Punkte A, B, D. Lösung

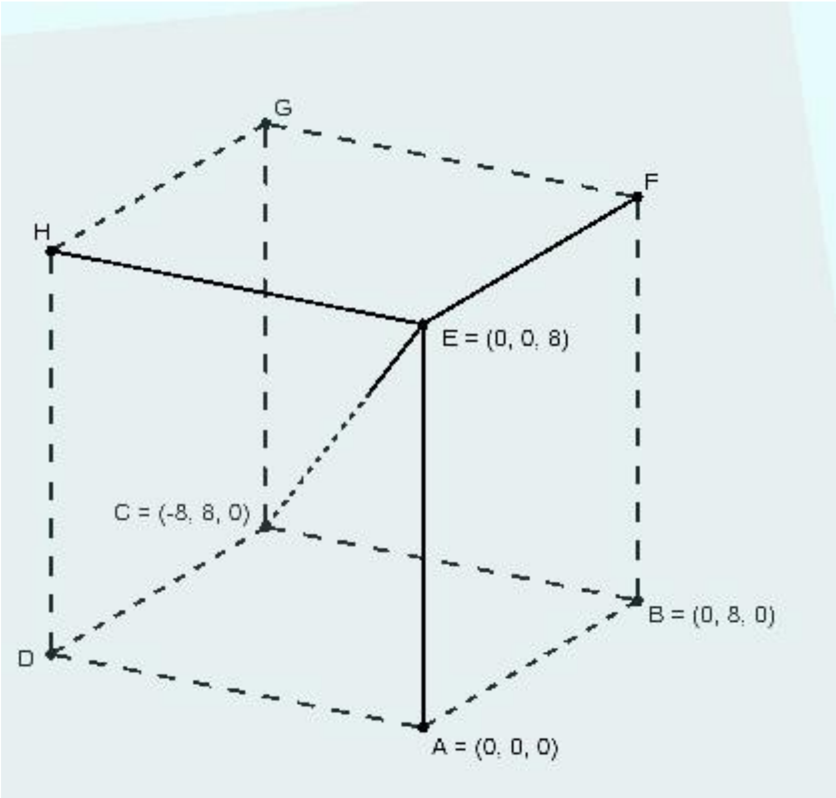
253. Ein Parallelogramm ABCD wird bestimmt durch A(-2|-3|-4)

und durch $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\0\\8\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}$. Trifft die Gerade

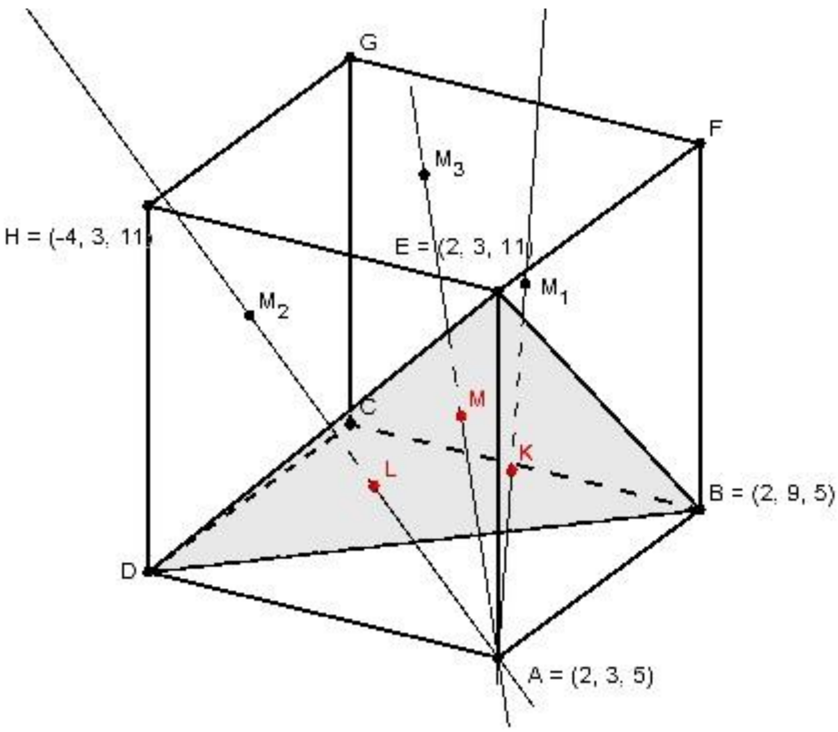
$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\8\\6\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ die Parallelogrammfläche?

254. Die Gerade g geht durch die Punkte P(4|2|0) und Q(8|8|8). Von wo bis wo liegt sie innerhalb des Tetraeders mit A(5|9|3), B(6|4,5|10), C(3|0|4) und D(10|6|5)?
Lösung

255. Bestimmen Sie im Würfel mit A(0|0|0), B(0|8|0), C(-8|8|0) und E(0|0|8) die Koordinaten der Schnittpunkte S und T der Raumdiagonalen CE mit den Ebenen AFH und BDG.



256. Bestimmen Sie im Würfel mit A(2|3|5), B(2|9|5), E(2|3|11) und H(-4|3|11) die Koordinaten der Schnittpunkte K, L und M der Strecken von A aus zu den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 der gegenüberliegenden Flächen mit der Ebene BDE.



Lösung

257. Bestimmen Sie a in der Geradengleichung

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$$ so, dass sie

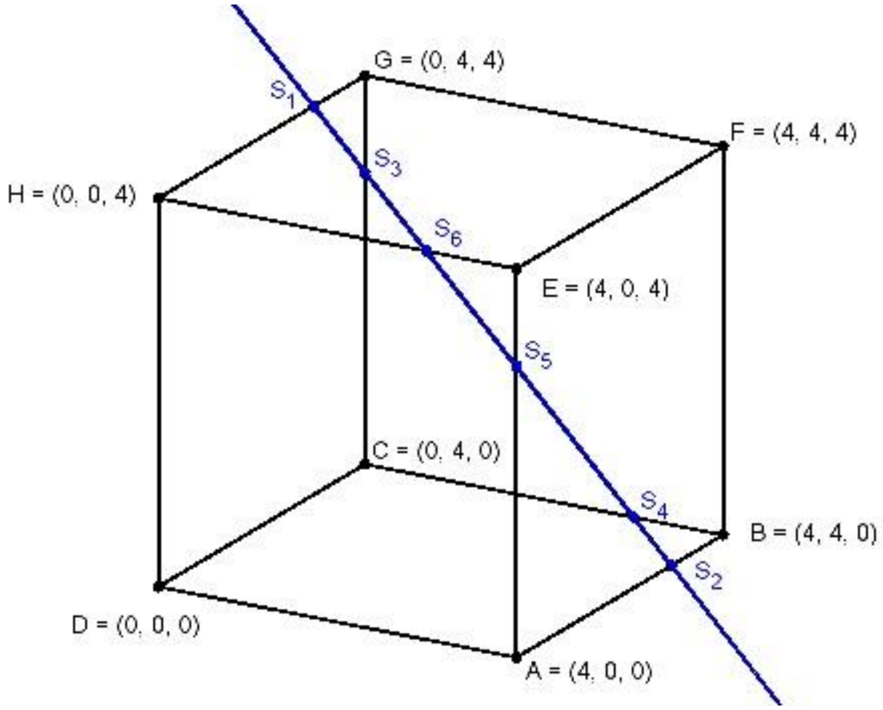
a) die Ebene ε durch A(3|0|7), B(4|3|9) und C(5|5|14) schneidet
b) parallel zu ε verläuft.

258. Bestimmen Sie a in der Ebenengleichung

$$\varepsilon:\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}a\\0\\1\end{pmatrix}$$ so, dass sie

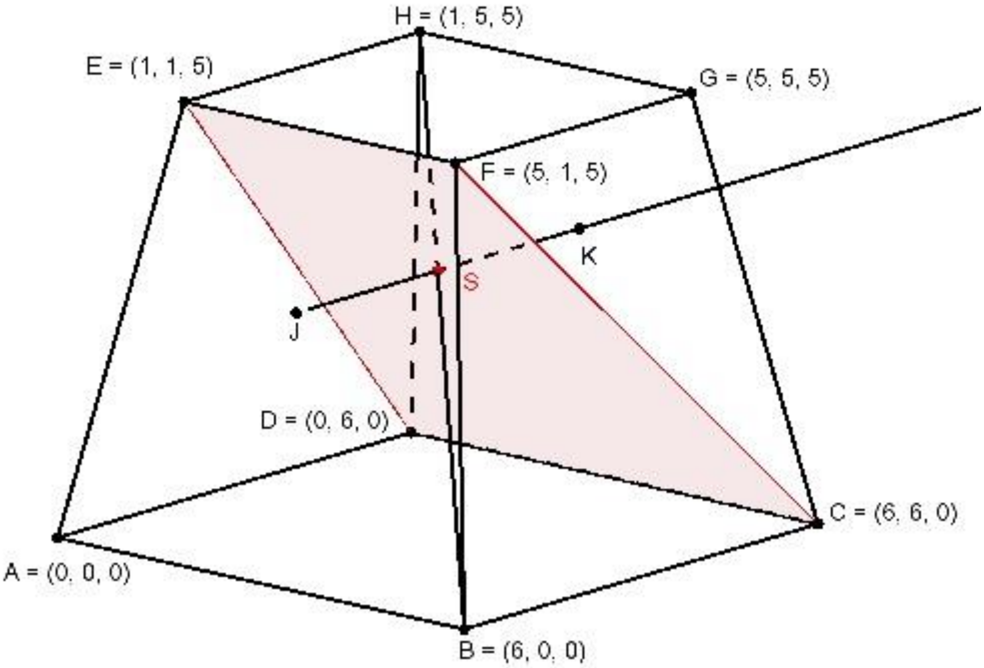
a) die Gerade g durch A(2|0|8) und B(3|4|11) schneidet.
b) parallel zu g verläuft. Lösung

259. Der Würfel hat eine Kantenlänge von 4 LE und wird von der Ebene ε:x + y + z = 7 geschnitten.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte S der Ebene mit den Seitenkanten des Würfels.



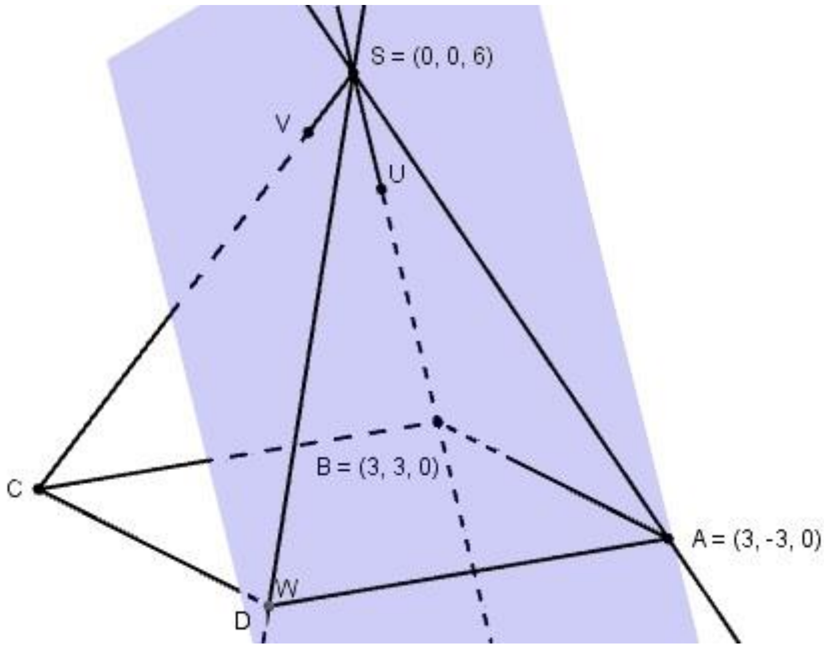
260. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S, Schnittpunkt von BH mit der Fläche CDEF.
b) Wie lauten die Koordinaten der Schnittpunkte J und K der zu FG parallelen Geraden mit den Flächen ABFE und CDHG?
c) Liegt S auf EC?
d) Liegen J und K in der Ebene durch die

Punkte C, E und H?



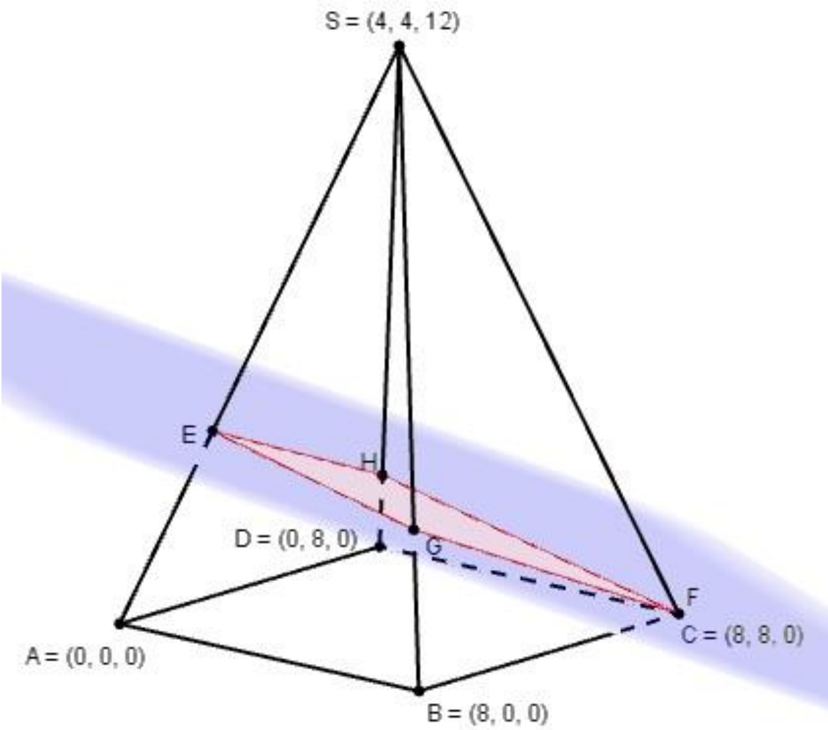
Lösung

261. Die Punkte A(3|-3|0), B(3|3|0) und S(0|0|6) legen eine quadratische Pyramide fest. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Ebene ε:2x - 3y + z = 3 mit den Seitenkanten AS, BS, CS und DS.



262. Die Punkte A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|8|0), D(0|8|0) und

S(4|4|12) legen eine quadratische Pyramide fest. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte E, F ,G und H der Ebene ε durch die Punkte P(9|15|-3), Q(14|10|-2) und R(15|17|-5) mit den Seitenkanten.

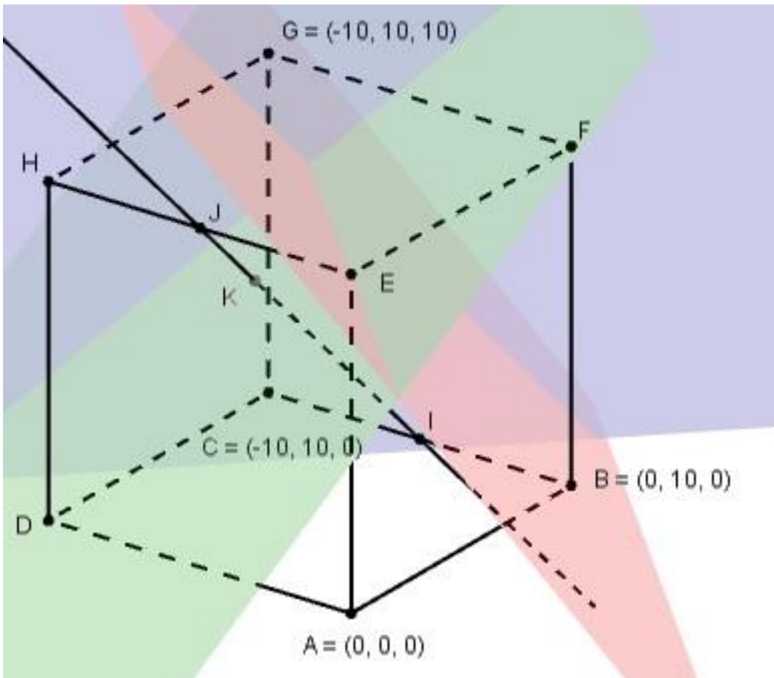


Lösung

263. Die Gerade durch A(1|2|3) und B(3|6|5) schneidet die Ebene ε:3x - y + 5z =22 im Punkt S.
In welchem Verhältnis teit S die Strecke AB?

264. Die Punkte O(0|0|0), A(0|6|0), B(-4|5|0) und C(-2|3|12) bilden eine dreiseitige Pyramide. Der Punkt D teilt OC im Verhältnis 1 : 5, E teilt OC im Verhältnis 2 : 1 und F teilt BC im Verhältnis 1 : 1. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte DEF in Parameterform.
Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen DEF und OAB. Lösung

265. a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung für die Ebene BEG.
b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung für die Schnittgerade g der Ebenen BEG mit CFH.
Die Gerade h geht durch die Mitten von BC und EH.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von h mit den Ebenen BEG, CFH und DEG.



266. Die Gerade $h: \vec{x} = \binom{6}{6} + u * \binom{x}{y}$ schneidet die Geraden $g_1; \vec{x} = \binom{2}{5} + r * \binom{2}{-1}$ im Punkt E, $g_2; \vec{x} = \binom{2}{5} + s * \binom{4}{1}$ im Punkt D$\binom{6}{6}$ und $g_3; \vec{x} = \binom{2}{5} + t * \binom{1}{1}$ im Punkt F. In welchem Verhältnis teilt D die Strecke zwischen den Schnittpunkten EF auf h mit dem Richtungsvektor $\binom{1}{2}$? Wie lautet der Richtungsvektor von h, wenn D die Strecke GH auf h im Verhältnis 2:1 teilt? Lösung

267. Die Punkte A(1|2), B(5|2), C(4|7) und D(3|7) bilden ein Trapez. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes E der Geraden, die zum einen durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke ABD und BCD, zum anderen durch die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Seiten AB und DC des Trapezes gehen.
Dieser Punkt E ist der Schwerpunkt des Trapezes.

268. Die Punkte A(1|0), B(5|1), C(6|4) und D(-1|5) bilden ein Viereck. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden, die zum einen durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke BCD und ACD, zum anderen durch die Schwerpunkte S_3 und S_4 der Dreiecke ABD und ABC des Vierecks gehen.
Dieser Punkt S ist der Schwerpunkt des Vierecks. Lösung

269. Die Punkte A(4|1|0), B(0|7|2), C(-2|4|5) und D(2|-2|3) bilden ein Parallelogramm. P und Q seien die Mitten von AB bzw. CD.
a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des

Dreiecks APQ.
b) In welchem Verhältnis teilt S die Strecke AC?
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes T
der Geraden g durch G(1|0|0) und H(0|1|1) mit der Ebene ABC.

270. Die Ebenen
E_1: 9x + y - 24z = 10
E_2: 32x - 13y + 14z = 19
E_3: 22x + 19y - 9z = 41
E_4: 19x - 31y - z = -161 begrenzen eine dreiseitige Pyramide.
a) Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und S.
b) Geben Sie Parametergleichungen für die Geraden an, auf denen die Seitenkanten liegen.
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes O der Pyramide und der Schwerpunkte G, H, K und L der Seitenflächen.
d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes P der Pyramide, die durch G, H, K und L gebildet wird. Lösung

271. Berechnen Sie den Abstand d des Punkte A(1|3|0) von

der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

272. Berechnen Sie den Abstand d des Punkte A(3|1|-2) von

der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lösung

273. Berechnen Sie den kürzesten Abstand d der

beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

274. Verlaufen die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ und
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$. orthogonal zur Ebene E:2x + y + 4z = 5?
Lösung

275. Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden durch P(10|10|15) senkrecht zur Ebene E:x + y + z = 8 und die Koordinaten ihres Fußpunktes F.

276. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt P' des Punktes P(4|-1|3)

an der Ebene E:3x - 2y + z = 3. Lösung

277. Wie liegen die Ebenen zueinander?

a) $\varepsilon_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\varepsilon_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\varepsilon_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\varepsilon_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\varepsilon_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\varepsilon_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\varepsilon_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\varepsilon_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

278. Berechnen Sie die Gleichungen der Schnittgeraden g der Ebenen

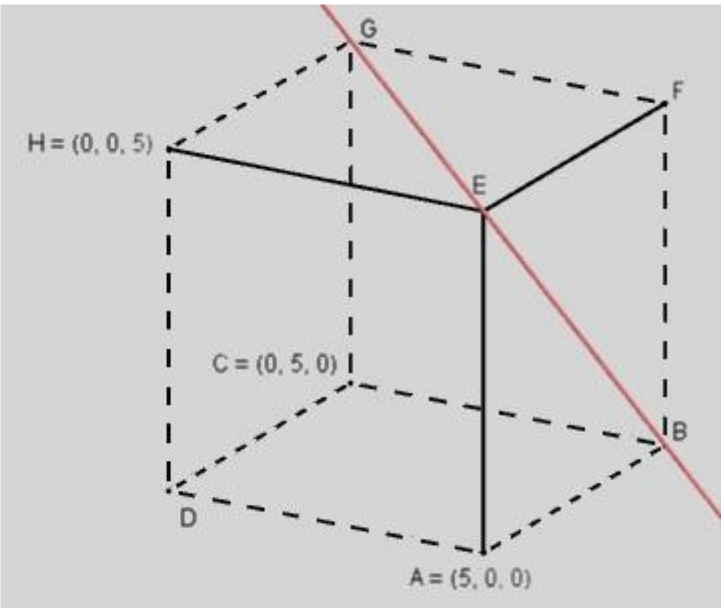
a) E_1: x - y + 2z = 7 (1)
E_2: 6x + y - z = -7 (2)

b) E_1: x + y - 2z = -1 (1)
E_2: 2x + y - 3z = 2 (2)

c) E_1: x + 5z = 8 (1)
E_2: x + y + z = 1 (2) Lösung

279. Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g der Ebene E:2x - 3y + 5z = 60 mit der x, y - Ebene.

280. Berechnen Sie die Schnittgerade g der Ebenen durch BEG und AGH.



Lösung

281. Bestimmen Sie gemeinsame Punkte der Ebenen:

E_1: $-x + 3y + 2z = 7$
E_2: $3x - 2y + 4z = -17$
E_3: $2x + y - 4z = 0$

282. Bestimmen Sie gemeinsame Punkte der Ebenen:

E_1: $2x - 3y + z = 1$
E_2: $-4x + 3y - z = 7$
E_3: $-3y + z = 9$ Lösung

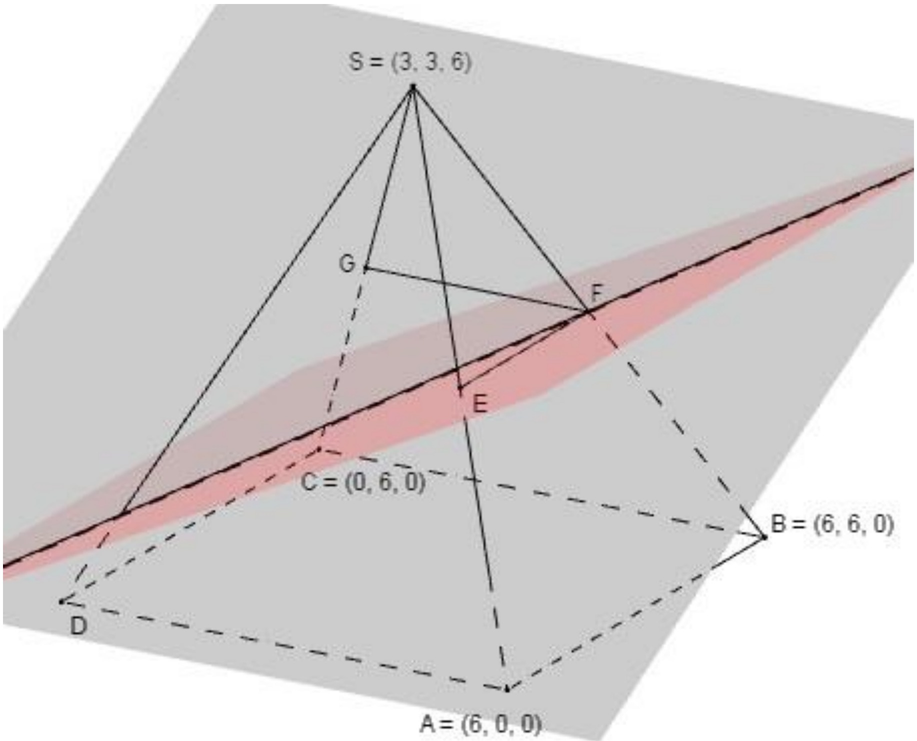
283. Sind die beiden Ebenen zueinander orthogonal?
a)
E_1: $2x + y - 2z = 6$
E_2: $2x - 2y + z = 11$
b)
E_1: $x + 5y + z = 1$
E_2: $3x + y - 15z = 0$

284. Für welches a sind die beiden Ebenen zueinander orthogonal?
a)
E_1: $2x - 5y + z = 7$
E_2: $3x + y + az = 10$
b)
E_1: $3x + 7y - 2z = 3$
E_2: $ax + 5y + 10z = 1$ Lösung

285. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform so, dass sie durch die Punkte A(2|-1|7)

und B(0|3|9) geht und zur Ebene E: 2x + 2y + z = 7 orthogonal ist.

286. a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Ebene E, die durch die Seitenmittelpunkte von SB und SC geht und orthogonal zur Seitenfläche BCS steht.
b) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Ebene F, die durch die Seitenmittelpunkte von SA und SB geht und orthogonal zur Seitenfläche ABS steht.
c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schnittgerade g von E und F.



Lösung

287. Bestimmen Sie eine Gleichung in Koordinatendarstellung für die Ebene G, die durch den Punkt A(3|-1|4) geht und orthogonal zu den Ebenen E:2x - y + 3z = 19 und F:2x + y - z = 1 steht.

288. Bestimmen Sie eine Gleichung in Koordinatendarstellung für die Ebene G, die durch den Punkt A(3|-1|4) geht und orthogonal zu den Ebenen

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ und

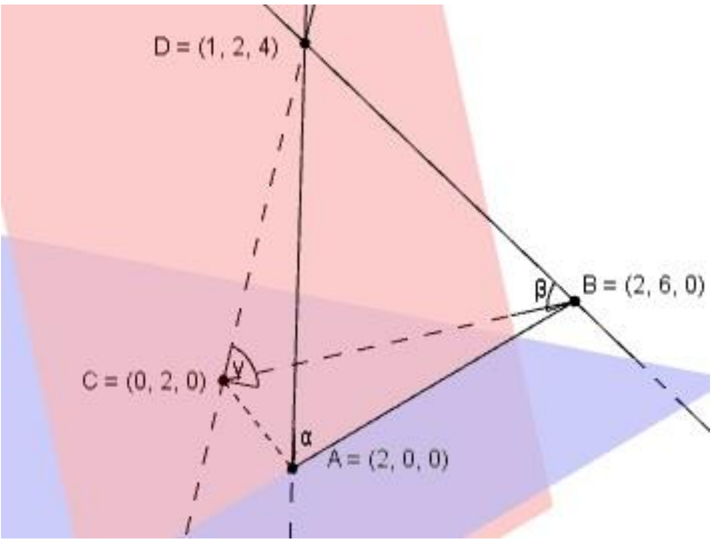
$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$ steht. Lösung

289. Unter welchem Winkel α und in welchem Punkt T schneidet

die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Ebene

E: x + 5y + 7z = -27?

290. a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Strecken AD, BD und CD mit der Fläche ABC?
b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Strecken AC, BC und CD mit der Fläche ABD?



Lösung

291. Berechnen Sie den Schnittwinkel α zwischen den Ebenen

a) $E_1: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $E_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

b) E_1: x + y + z = 10 und E_2: x - y + 7z = 0

292. Berechnen Sie den Schnittwinkel α zwischen den Ebenen

E_1: 6x - 7y + 2z = 13 und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung

293. Berechnen Sie den Schnittwinkel α zwischen den Ebenen

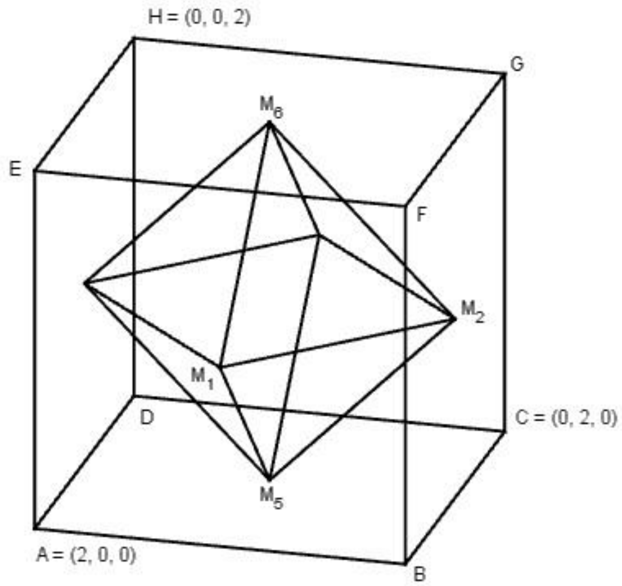
$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

294. Berechnen Sie für die Ebene E: 2x - y + 5z = 1 die Winkel,
unter denen sie
a) von den Koordinatenebenen
b) von den Koordinatenachsen
geschnitten wird. Lösung

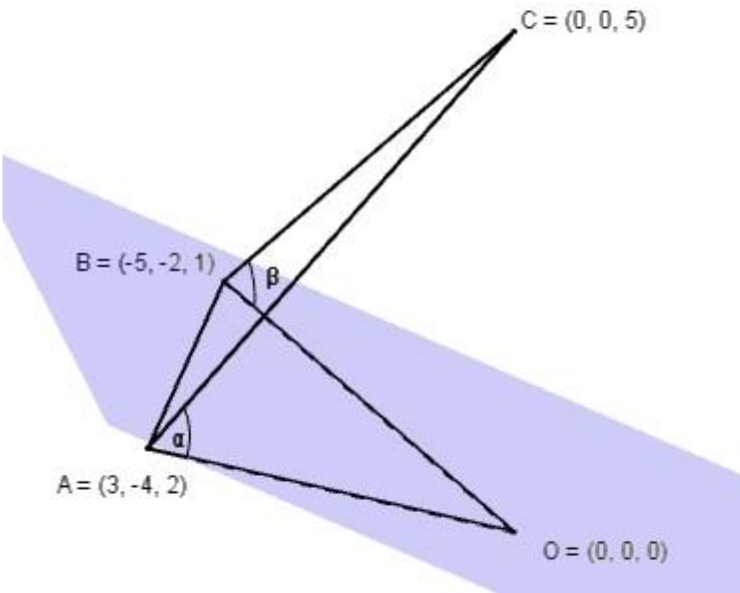
295. Berechnen Sie für die Ebene E: ax + by + cz = d den Winkel α, wenn sie durch den Koordinatenursprung geht und von den Koordinatenebenen unter dem gleichen Winkel α geschnitten werden soll.

296. Berechnen Sie, unter welchem Winkel α sich die Ebenen E_1 und E_2 durch die angegebenen Mitten der Seitenflächen schneiden.
$E_1: M_1M_2M_6$ und $E_2: M_1M_2M_5$.



Lösung

297. Ein Mast, mit seinem Fußpunkt im Koordinatenursprung, soll an einem Hang in 5 m Höhe mit 2 Seilen gegen Sturm gesichert werden. Die Seile sind am Hang in den Punkten A(3|-4|2) und B(-5|-2|1) befestigt. Unter welchen Winkeln α und β liegen die Seile zum Hang?



298. Ein Viereck hat die Eckpunkte A(6|7|6), B(8|13|15), C(2|6|9) und D(0|0|0). Überprüfen Sie durch Rechnung, um was für ein Viereck es sich handelt. Lösung

299. Berechnen Sie für A(1|-2|-7), B(17|-2|5), C(-8|-2|5) und D(1|6|7)
a) den Flächeninhalt A des Dreiecks A, B, C
b) den Abstand d des Punktes D von der Ebene A, B, C.
c) das Volumen V der dreiseitigen Pyramide A, B, C, D
Berechnen Sie für A(1|-2|-7), B(17|-2|5), C(-8|-2|5) und D(1|6|7)
a) den Flächeninhalt A des Dreiecks A, B, C
b) den Abstand d des Punktes D von der Ebene A, B, C.
c) das Volumen V der dreiseitigen Pyramide A, B, C, D

300. Die Gerade g geht durch A(0|0|3) und B(-5|3|3), die Gerade

h wird beschrieben durch $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \ r * \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g mit h und dann die Gleichung der Ebene E, die von g und h aufgespannt wird in Parameter- und Koordinatenform.
b) Berechnen Sie die Winkel zwischen g und h, g und der x-Achse, E und der x-Achse und E und der x, y-Ebene.
Lösung

301. Die Grundfläche einer Pyramide wird begrenzt durch
die Punkte O(0|0|0), $A\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\left|\frac{a}{2}\right|0\right)$ und $B(0|a|0)$.
Ihre Spitze S liegt bei $\left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\left|\frac{a}{2}\right|h\right)$.
a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes M des

Dreiecks OAB.
b) Für welches h in Abhängigkeit von a sind die Seitenflächen der Pyramide orthogonal?

302. Ermitteln Sie eine Normalengleichung der Ebene

$\varepsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Lösung

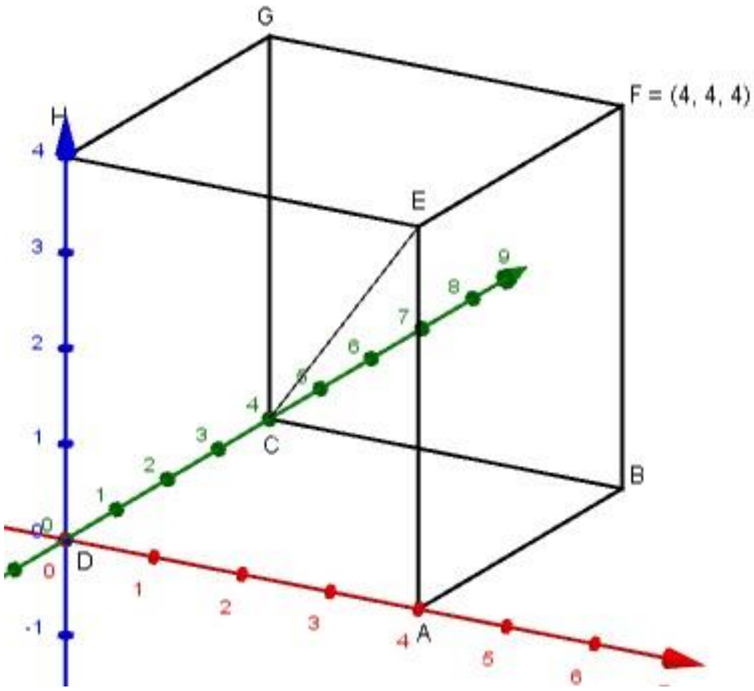
303. Wie lautet die Normalengleichung einer Geraden, die durch den Punkt A(2|-6) geht und
a) parallel zur x-Achse
b) senkrecht zur x-Achse
c) senkrecht zur Winkelhalbierenden im 1. Quadranten
d) parallel zur Geraden 5x + 2y = 7 verläuft?

304. Wie lautet die Normalengleichung der Geraden, auf der
a) die Mittelsenkrechte auf c
b) die Höhe auf a im Dreieck A((0|4), B(-5|1),C(1|-4) liegt?
Lösung

305. Wie lautet die Normalengleichung einer Ebene, die durch den Punkt A(-4|1|3) geht und
a) parallel zur x, y - Ebene
b) senkrecht zur y-Achse
c) parallel zur Ebene 2x - y - z = 8
d) parallel zur Ebene x = y
e) senkrecht zur Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ verläuft?

306. Eine Gerade g geht im Dreieck mit A(-4|-3), B(2|-1) und C(2|-5) durch C und ist parallel zu AB.
Die Gerade h geht durch C und ist orthogonal zu g.
Bestimmen Sie die Normalengleichungen von g und h.
Lösung

307. Bestimmen Sie für den Würfel mit der Kantenlänge 4 die Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt F(4|4|4) geht und senkrecht auf der Raumdiagonalen CE steht.



308. Wie groß ist der Abstand d des Punktes P(2|3|2) von der Ebene ε: x - y - z = 3? Lösung

309. Welchen Abstand d haben die beiden Geraden
a) $g:\vec{x} = \binom{5}{1} + r * \binom{3}{4}$ und $h:\vec{x} = \binom{1}{4} + s * \binom{-3}{-4}$
b) g: 2x - y = - 1 und h: -2x + y = - 9

310. Welchen Abstand d haben die beiden Ebenen voneinander?

a) $\varepsilon_1:\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und

$\varepsilon_2:\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ (2,37 LE)

b) ε_1: 12x - 4y + 3z = 7 und ε_2: -12x + 4y - 3z = 19? Lösung

Hessesche Normalform, Abstand Punkt Gerade, Abstand windschiefer Geraden

311. Bestimmen Sie den Abstand d der Punkte A(1|1|-2), B(5|1|0) und C(1|3|3) von der Ebene E:2x - 10y + 11z = 0 mit Hilfe der Hesseschen Normalform.

312. Bestimmen Sie den Abstand d der Punkte A(2|0|2),

B(2|1|-8) und C(5|5|5) von der Ebene $E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

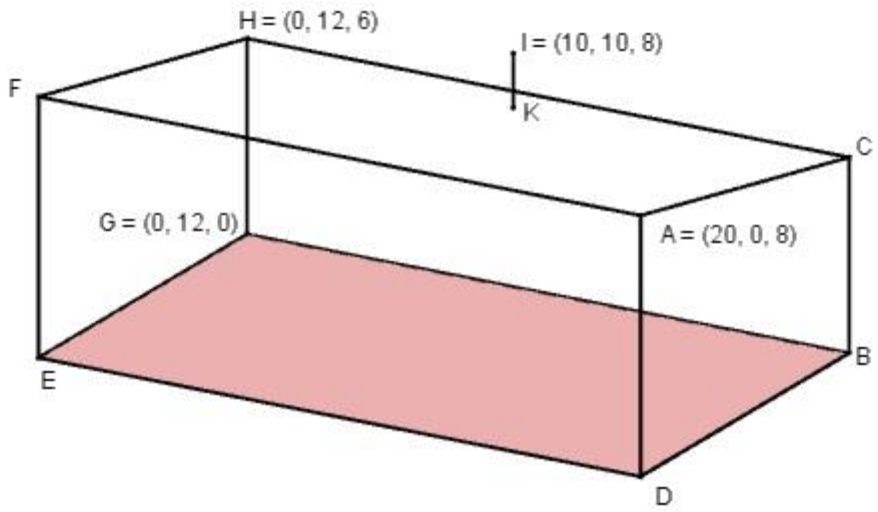
mit Hilfe der Hesseschen Normalform.
Lösung

313. Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes A(3|3|-4) von der Ebene E durch die Punkte P(2|0|4), Q(6|7|1) und R(-2|3|7).

314. Berechnen Sie das Volumen V der quadratischen Pyramide, deren Grundfläche durch die Punkte A(12|0|0), B(12|8|6), C(2|8|6) und D(2|0|0) begrenzt wird und deren Spitze bei S(7|16|-13) liegt. Lösung

315. Bestimmen Sie den Abstand d der Ebene E: 2x + 6y + 3z = 21 vom Koordinatenursprung O.

316. Die Halle wird durch ein senkrecht zur Grundfläche stehendes Rohr mit der Spitze I entlüftet. Wie weit ist der Luftaustritt von der Dachfläche entfernt? Wie lang ist es?



Lösung

317. Der Punkt P(3|-2|2) liegt in der Ebene E:10x + 2y - 11z = 4. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte S und T, die von E den Abstand 3 LE haben.

318. Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes F von A(-2|1|-3) auf die Ebene E:x - 2y + 2z = 8 und eines Punktes B, der gleichweit wie A von F entfernt ist. Lösung

319. Berechnen Sie den Abstand d des Punktes A(6|7|-3) von der

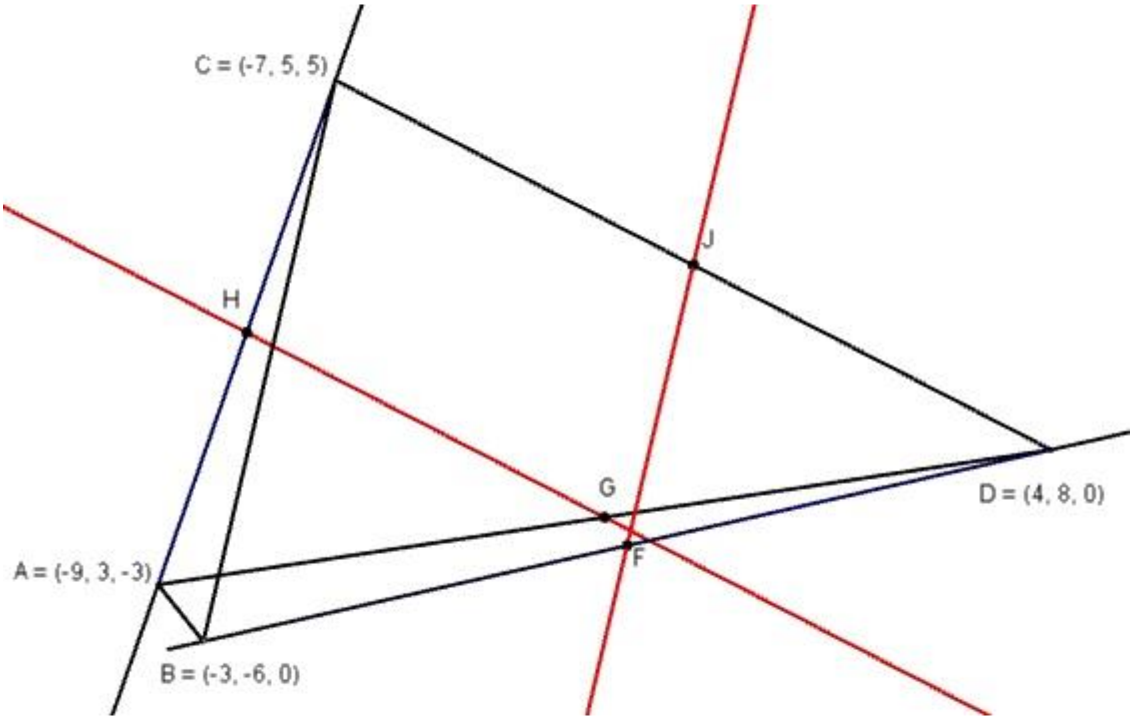
Geraden g $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

320. Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks ABF mit A(5|7|9), B(-7|-3|14) und dem Lotfußpunkt F von B aus auf die Gerade g durch A mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Volumen V des Kegels, der entsteht, wenn AB um g rotiert. Lösung

321. Berechnen Sie den Abstand d zwischen den Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

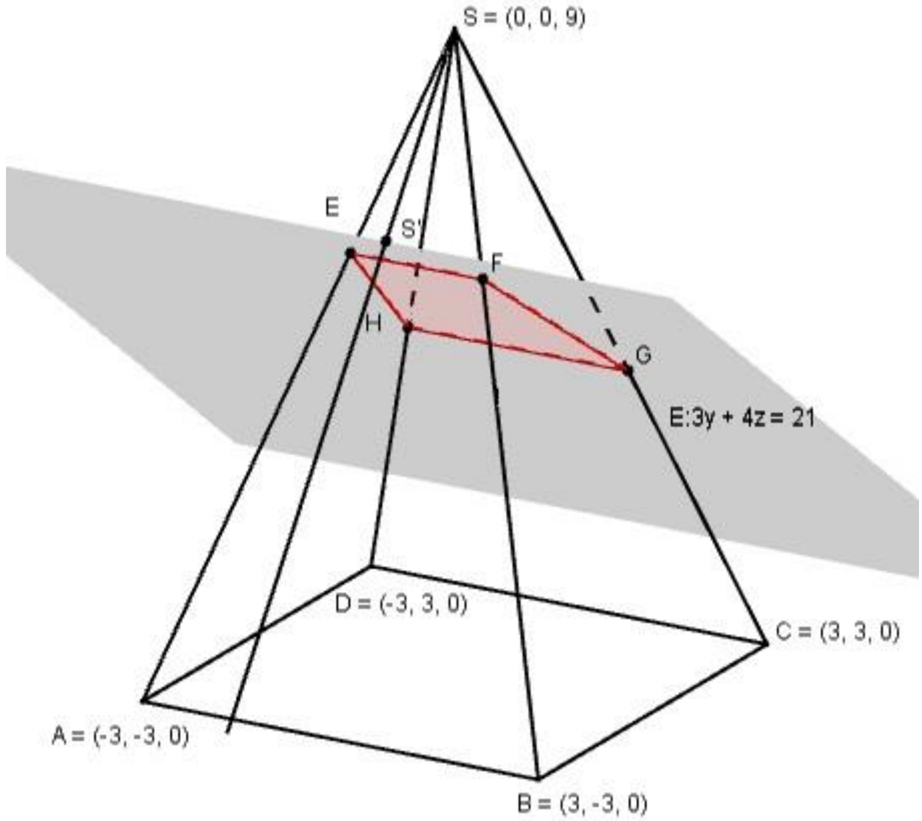
322.



Berechnen Sie den
a) Abstand d der Geraden durch A und C zu der durch B und D.
b) Abstand e von A zur Ebene E durch B, C und D.
c) Abstand f der Geraden durch G und H zu der durch J und F.
(G, H, J und F sind jeweils Seitenmitten). Lösung

323. Flugkörper A beginnt seinen Flug in (0|0|0) nach P(3|12|4). Flugkörper B fliegt von Q(0|10|5) nach R(0|2|5). Sie fliegen mit konstanter Geschwindigkeit.
Wie groß ist ihr Minimalabstand d?
Wie groß ist der Minimalabstand e ihrer Flugbahnen?

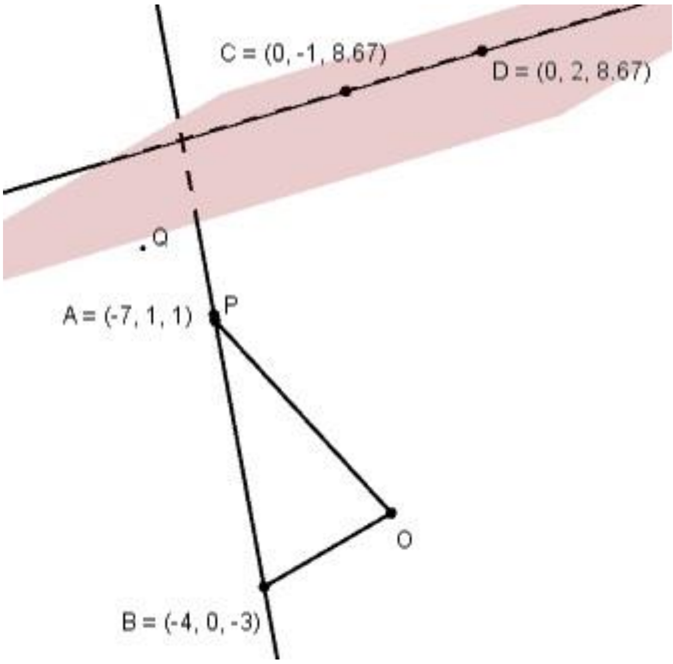
324. Die quadratische Pyramide P wird durch die Ebene E geschnitten.
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Schnittfläche der Ebene mit der Pyramide.
b) Berechnen Sie den Abstand d der Spitze S von der Ebene E.
c) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide und der Teilkörper, in die die Pyramide durch die Ebene geteilt wird.



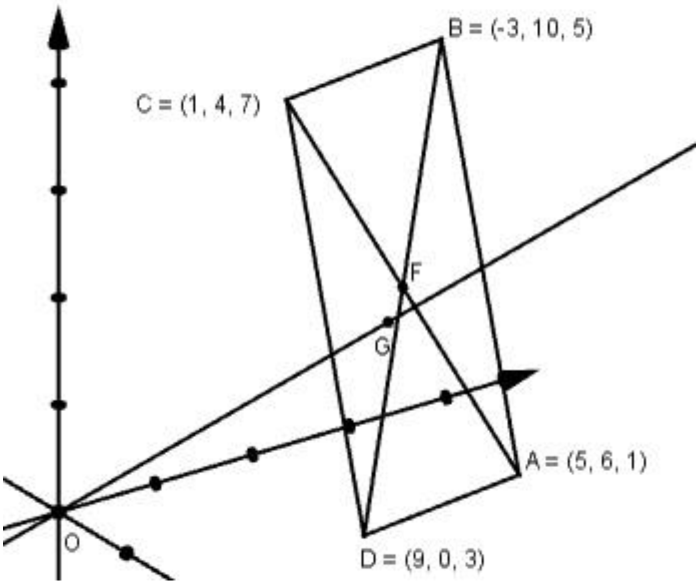
Lösung

325. a) Für welchen Wert von k > 0 bildet der Punkt P(- 4 - 3k|k|4k - 3) mit den Punkten O und B ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis OP?
b) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E, die die Gerade AB enthält und parallel zur Geraden CD verläuft?
c) Berechnen Sie den Abstand d der Geraden AB und CD.
d) Wie groß muss a sein, wenn die Ebene F durch die Punkte C, D und Q(a|2|2/3) gehen und senkrecht auf der Ebene E stehen soll?

[Lösung](#)



326. a) Ermittle Gleichungen für die Ebene E, in der das Viereck ABCD liegt, in Parameter- und Normalenform.
b) Bestimme den Abstand d von E zu O.
c) Bestimme den Abstand e des Diagonalenschnittpunktes F von O.
d) Bestimme den Abstand f des Punktes F vom Fußpunkt G des Lotes von O auf E.
e) Bestimme eine Parametergleichung der Geraden g durch C, die von A und B gleichen Abstand hat.



[Lösung](#)

327. In welchem Verhältnis teilt die Winkelhalbierende von α im Dreieck ABC mit A(0|2|1), B(2|4|2) und C (4|5|1) die gegenüberliegende Dreiecksseite?

328. Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D(8|-4|13) von der Ebene E durch die Punkte A(4|0|0), B(1|6|4) und C(7|-2|-2).
Wie lauten die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von D auf E?
Wie groß ist der Schnittwinkel α zwischen E und der x, y - Ebene? Lösung

329. a) Ermitteln Sie die Gleichung der Schnittgeraden g in Parameterform der beiden Ebenen E_1: x + z = -1 und E_2: x + y - z = -3.
b) Liegt g in allen Ebenen der Schar
$E_{(t)}$ = (t + 1)x + y + (t - 1)z + t + 3 = 0?
c) Für welche t_1 und t_2 sind die beiden Ebenen orthogonal?
d) Für welche t hat die Ebene $E_{(t)}$ den Abstand $\sqrt{3}$ zum Nullpunkt?
e) Ermitteln Sie eine Parametergleichung für die Gerade h, die in $E_{(t)}$ liegt, durch P(-2|0|1) geht und auf g senkrecht steht.
f) Wie lang ist eine Seite eines Dreiecks mit den Eckpunkten P, $Q_{(t)}$ und $Q_{(t+1)}$, wenn $Q_{(t)}$ = (1 - 2t| - 2t|4 + 2t), unabhängig von t?
Für welche t sind die beiden anderen Seiten gleich lang?

330. a) Für welches t ist $E_{(t)}$ = 2x - 6y + (4 - t) * z = - 2t parallel zu der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?
Ermittle die Gleichung der Ebene, die zu keiner anderen der Schar orthogonal ist.
b) Die Ebene E_1 geht durch P(1|11|2) und liegt parallel zu $E_{(7)}$. Berechnen Sie deren Abstand d. Lösung

331. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform, die durch die Punkte A(0|-7|-4), B(2|1|2) und C(-1|-3|5) geht.
b) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes P(1|4|-1) von E.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P' bezüglich E.
d) Ermitteln Sie den Schnittpunkt T der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit E und den Schnittwinkel α.
e) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte Q auf der z-Achse, von wo die Strecke AB unter einem rechten Winkel erscheint.

332. a) Für welchen Wert von α ist die Gerade
$g_{(\alpha)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2+\alpha \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene
E:x + 2y= 3? (a = -2/3). Liegt sie in E?
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $S_{(\alpha)}$ von $g_{(\alpha)}$ mit E für alle sonstigen Werte für α. (1|1|α). Für welches α ist $g_{(\alpha)}$ orthogonal zu E?

c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte $T_{(\alpha)}$ von $g_{(\alpha)}$ und

$h_{(\alpha)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+\alpha \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha - 2 \\ \alpha + 2 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu den Richtungsvektoren von $g_{(\alpha)}$ und $h_{(\alpha)}$. Ermitteln Sie eine Normalengleichung der Ebene $E_{(\alpha)}$ in der die beiden Geraden liegen.

Für welches α verläuft $E_{(\alpha)}$ durch den Nullpunkt?

e) Wie groß ist der Schnittwinkel β zwischen E und $E_{(-2)}$?

Lösung

333. a) Bestimmen Sie die Parameterformen der 4 Geraden, die zum einen von E_1:4y - 3z = 15 den Abstand 7 und von E_2: 6x - 2y + 3z = 5 den Abstand 11 haben.

b) Bestimmen Sie einen Punkt P, der von E_1 den Abstand 7, von E_2 den Abstand 11 und von E_3:x + 2y + 2z = 0 den Abstand 5 hat.

334. Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes P = (6|1|1) von der Geraden g, die durch die Punkte A = (2|3|5) und B = (-2|9|-1) geht, wenn P auf einer Senkrechten zu g liegt.

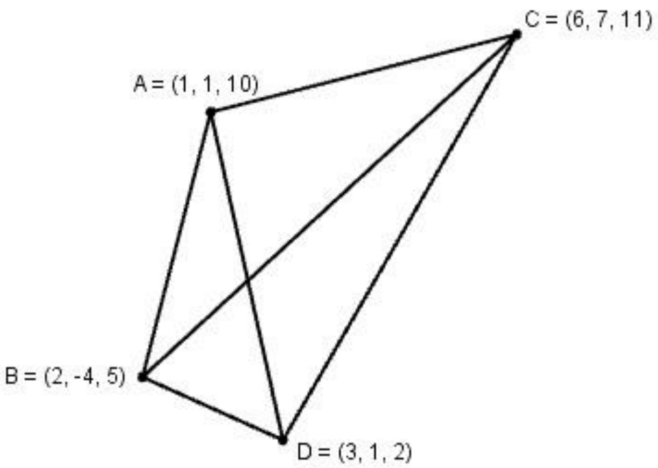
Lösung

335. Berechnen Sie die Abstände zwischen

a) A und der Ebene BCD

b) A und der Geraden BC

c) den Geraden AB und CD.



336. a) Bestimmen Sie den Abstand d der beiden Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die Punkte A auf g und B auf h so, dass die Länge der Strecke AB gleich d ist.
c) Wie lauten die Parameter- und die Normalengleichung der Ebene E durch A und h?
d) Bestimmen Sie einen Punkt C auf g so, dass $\overline{BC} = \overline{BD}$ mit D = (2|1|5) gilt.
e) Bestimmen Sie den Winkel, die die zu h parallele Gerade durch A mit g bildet. Lösung

337. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ gebildeten Parallelogramms und den von ihnen eingeschlossenen Winkel α.

338. Bestimmen Sie die Ebene E in Normalen- und Koordinatenform, die durch die Spannvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und den Punkt P(1|-1|2) festgelegt ist. Lösung

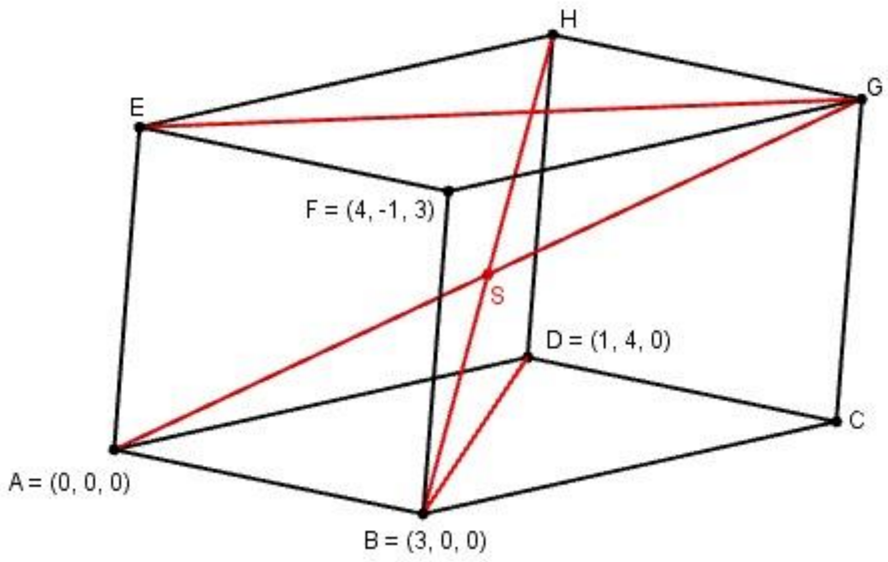
339. Wie lautet die Koordinatengleichung einer Ebene durch die 3 Punkte A = (2|-1|4), B = (4|1|2) und C = (1|5|3)?

340. Ermitteln Sie das Spatprodukt V für die 3 Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) mit Hilfe von Vektor- und Skalarprodukt
b) mit einer dreireihigen Determinante. Lösung

341. a) Ermitteln Sie den Schnittpunkt S der beiden Raumdiagonalen AG und BH.
b) Ermitteln Sie den Abstand d zwischen den beiden Flächendiagonalen BD und EG.
c) Ermitteln Sie den Abstand e zwischen der Raumdiagonale AG und der Flächendiagonale BD.
d) Ermitteln Sie die Höhe h des Spats.



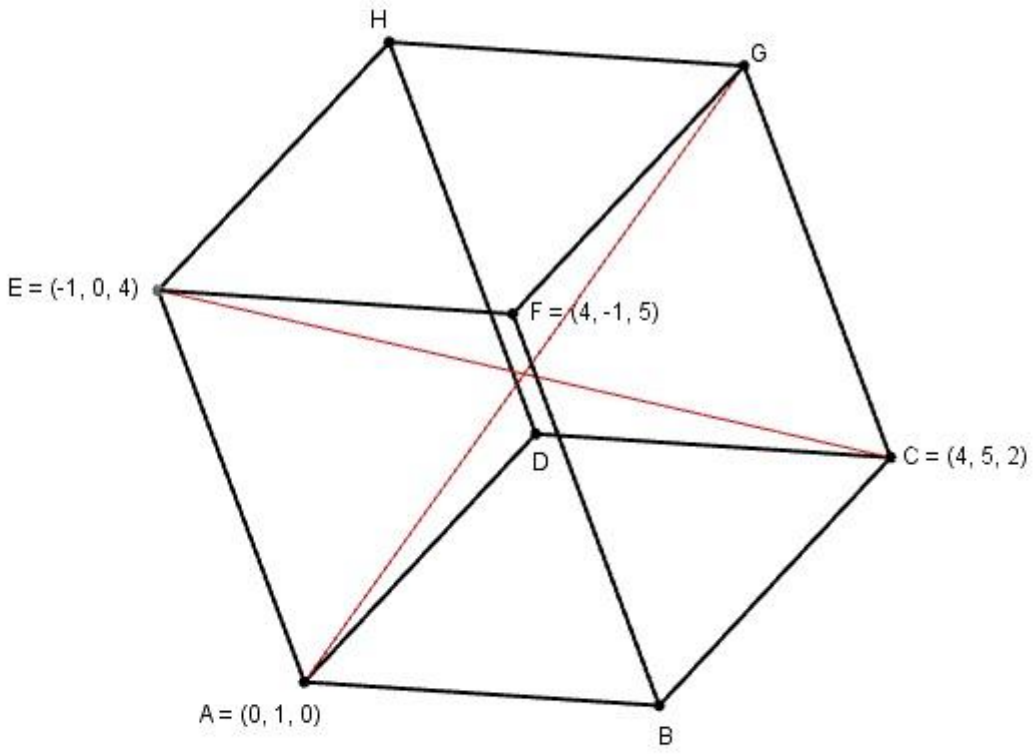
342. Bestimmen Sie, wenn vorhanden, den Schnittpunkt S

der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Ebene
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Vektorprodukts
und deren Schnittwinkel α. Lösung

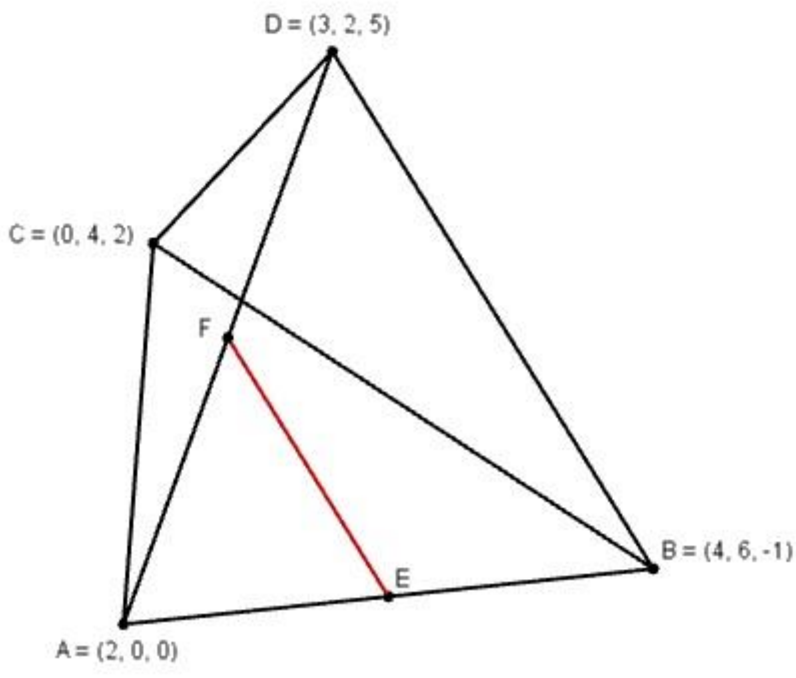
343. Bestimmen Sie die Lage der der Geraden
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
mit Hilfe des Vektorprodukts.

344. Bestimmen Sie die Lage der Geraden
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ zur Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
mit Hilfe des Vektorprodukts. Lösung

345. Berechnen Sie
a) die Höhe h des Parallelflachs.
b) sein Volumen V mit Hilfe des Spatprodukts
c) den Abstand d der Strecke BG von der Ebene E, die durch die Raumdiagonalen AG und CE gebildet wird.



346. Berechnen Sie
a) den Abstand d der Verbindungslinie der Seitenmitten von AB und AD zur Seitenfläche BCD.
b) den Abstand e von Punkt A zu BCD
c) das Volumen V des Tetraeders. Lösung



347. Berechnen Sie den Abstand d oder die Schnittgerade g,

dann auch den Schnittwinkel α, der beiden Ebenen

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

348. Bestimmen Sie, welche Lage die beiden Ebenen

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und

$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ zueinander haben. Lösung

349. Bestimmen Sie, welche Lage die Ebene E durch die Seitenmitten E von AD, F von BD und G von CD zur Ebene F durch die Seitenfläche ABC hat, wenn A = (-2|0|0), B = (4|-2|2), C = (6|4|4) und D = (2|0|8).

350. a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks mit A = (a|0|0), B = (0|a|0) und C = (0|0|a) mit a > 0.
b) Ermitteln Sie für die Ebene E durch A, B und C die Parameter- und Normalengleichung. ($\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$)
c) Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes P, wenn gilt SP ⊥ E, $|SP| = \frac{2 * \sqrt{3}}{3} * a$ und wenn P und der Koordinatenursprung O auf verschiedenen Seiten von E liegen.
d) Ermitteln Sie eine Parametergleichung für die Gerade g durch O und P und den Winkel α, den sie mit der positiven x-Achse einschließt.
e) Berechnen Sie das Volumen V des Tetraeders ABCP. Lösung

351. a) Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks mit A = (3|1|1), B = (1|2|1) und C = (1|1|3).
b) Ermitteln Sie eine Normalengleichung der Ebene E durch A, B und C.
c) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Gerade g, die auf E senkrecht steht und durch den Punkt D = (0|-2|0) geht.
d) Berechnen Sie den Schnittpunkt F von g mit E und die Länge von DF.

352. a) Ermitteln Sie für die Ebene E durch A = (1|0|1),

B = (2|-1|3) und C = (2|0|1) eine Parameter- und
Normalengleichung. ($\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgerade g von
E und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Parameterform.
c) Ermitteln Sie eine Normalengleichung für die Ebene G, die auf F senkrecht steht und durch die Punkte A und C geht.
d) Wie liegen E und G zueinander? Lösung

353. a) Wie lautet eine Parametergleichung der Schnittgeraden g der Ebenen E: x - 3y + 2z = - 2 und F: 2x - y + z = 3.
b) Wie groß ist der Schnittwinkel α zwischen E und F?

354. a) Berechnen Sie den Abstand d der Geraden
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h durch die Punkte A = (-1|-1|2) und B = (-1|-3|1) und die Koordinaten der Punkte G auf g und H auf h, auf denen GH senkrecht steht (Lotfußpunkte).
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k, die auf g und h senkrecht steht.
c) Ermitteln Sie eine Parametergleichung der Ebene E, die g und A enthält.
d) Berechnen Sie den Abstand B von E = e.
e) Berechnen Sie den Winkel, den h und E einschließen.
Lösung

355. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g in der das Lot von D = (5|1|6) aus auf die Ebene durch A = (-2|1|-1), B = (1|-3|-2) und C = (-3|1|2) liegt.
b) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D von der Ebene F: x - 3y + 2z = 1 und die Lage von g zu F.
c) Wie lautet die Gleichung der Schnittgeraden h von E und F?
d) Wie groß ist der Schnittwinkel α von E und F?

356. a) Ermitteln Sie den Abstand d der beiden Geraden g durch A = (-3|2|-1) und B = (-5|1|-2) und h durch C = (5|1|0) und D = (4|2|-1).
b) Berechnen Sie den Schnittpunkt S von g mit der Ebene E: 3x - y + 2z = 8.
c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, die g und den Punkt D = (4|2|-1) enthält.
d) Berechnen Sie die Schnittgerade k von E und F.
Lösung

357. a) Berechnen Sie den Abstand d der Ebene E, die die Gerade g durch A = (0|1|0) und dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält und parallel zur Geraden h durch B = (2|4|0) und dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft, vom Punkt C = (4|6|5).
b) Ermitteln Sie den Abstand e von g und h und bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k, in der das gemeinsame Lot von g und h liegt.

358. a) Bestimmen Sie für die Ebene E, die die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 9 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ enthält und parallel zur Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ verläuft, ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
b) Berechnen Sie den Abstand g von E = d.
c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade k, die bezüglich der Ebene E spiegelbildlich zu g liegt.
d) Berechnen Sie die Schnittgerade l der Ebene F, die g und k enthält, mit E. Lösung

359. a) Ermitteln Sie die Gleichungen der Schnittgeraden g von E: 3x + 4y + 3z = 24 und F: x - 2y + z = 8 und h von E und G: -12x + 4y + 3z = 24.
b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und h.
c) Wie lautet die Gleichung der Spurgeraden k von E in der x, y - Ebene?

360. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden k der Ebene E, bestimmt durch den Punkt B = (7|-2|3) und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Ebene
$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene G, die auf k senkrecht steht und durch A = (3|2|-1) geht.
c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade l, die durch C = (4|7|2) geht und parallel zur y, z - Ebene verläuft und ihren Abstand d zum Nullpunkt.
d) Enthält eine Ebene H, die durch B geht und auf l senkrecht steht, auch A?
e) Für welche m ergeben sich aus der Ebenenschar $E_{(m)}$:(2 - m) * x + 8y + (4 + 2m) * z = 10 + 3m

(- ∞ < m < ∞) die Ebenen E und F?
f) Für welches m steht $E_{(m)}$ auf F senkrecht? Lösung

361. a) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene E auf der die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix}$ liegt und die durch den Punkt A = (4|-8|0) geht.
b) Wie groß ist der Abstand d des Punktes B = (7|-1|9) von der Ebene
F: 3x - 2y + 6z = 28, und wie lauten die Koordinaten des Spiegelpunktes C von B an F?
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g mit der Schnittgeraden h von E und F.
d) Die Ebenenschar $E_{(k)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ k+5 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat eine gemeinsame Gerade k. Bestimmen Sie eine Gleichung für k.
e) Liegt k in der Ebene G:14x - 6y + 23z = 104, und für welche k ist G in $E_{(k)}$ enthalten?

362. Für welche k schneiden sich die Ebenen E: -2x + y - z = -4, F:x + y + 2z = 8 und die Schar $E_{(k)}$:2x - y + kz = 4 in genau einem Punkt? Lösung

363. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F, die auf der Ebene E: x - y - z = 2 senkrecht steht und durch die Punkte A = (0|1|1) und B = (2|-1|1) geht.
b) Liegt die Schnittgerade g von E und F in jeder Ebenenschar $E_{(k)}$: (k - 1)x + (k + 1)y + z = k - 2?
c) Für welche k stehen Paare aus $E_{(k)}$ aufeinander senkrecht?

364. a) Berechnen Sie den Abstand d von Punkt D = (6|11|13) zur Ebene E durch die Punkte A = (-6|-2|4), B = (0|6|6) und C = (-10|-10|2).
b) Berechnen Sie den Fußpunkt F des Lotes von D auf E.
c) Berechnen Sie den Abstand e der Geraden g durch G = (-1|4|6) und H = (2|4|3) von der Geraden h durch D und F.
d) In welchem Punkt S und unter welchem Winkel α schneidet g die Ebene E?
e) Bestimmen Sie die beiden Punkte P und Q auf der z - Achse so, dass die Dreiecke ABP und ABQ bei P bzw. Q einen rechten Winkel haben.
Lösung

365. a) Bestimmen Sie die Punkte P auf der Geraden g durch A = (6|5|4) und B = (7|7|6) und Q auf der Geraden h durch C = (1|0|1) und D = (4|-1|1) so, dass die Strecke PQ gleich dem Abstand d von g und h ist.
b) Bestimmen Sie die Punkte E und F auf g, für die

PE = PF = 6 LE gilt.
c) Welchen Winkel α schließt die Ebene G durch E und h mit der Ebene H durch P und h ein?

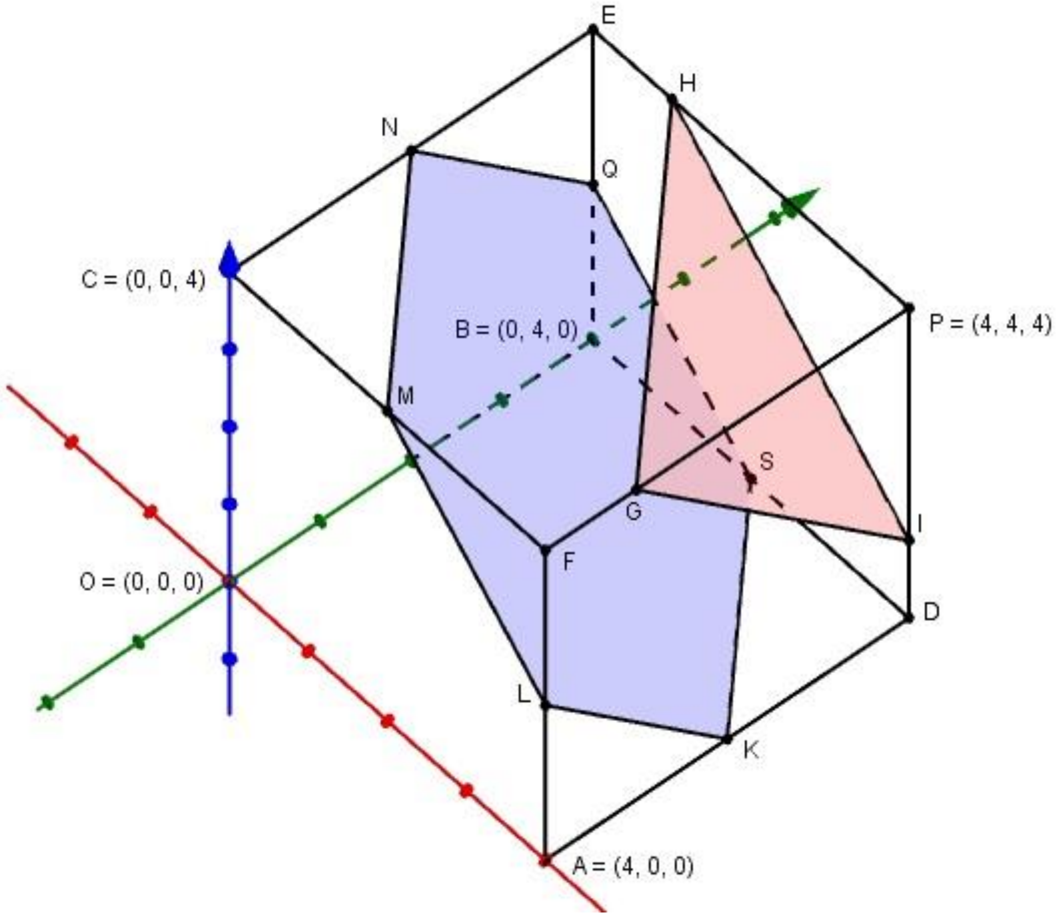
366. Ein Lichtstrahl wird an einem Spiegel, beschrieben durch die Gerade g: $x - 2y = 0$, von einem Punkt P = (0|2) aus so reflektiert, dass er danach durch den Punkt Q = (3|6,5) geht.
a) Berechnen Sie die Koordinaten des Auftreffpunktes B am Spiegel.
b) Berechnen Sie den Einfallswinkel α.
c) Wie lang ist die Strecke s von P über B nach Q? Lösung

367. Ein Lichtstrahl wird vom Punkt P = (20|0|15) aus an der Ebene E: $4x - 4y + 7z = 104$ im Punkt R so reflektiert, dass er danach durch den Punkt Q = (7|-19,5|46) geht.
Bestimmen Sie die Koordinaten von R und den Richtungsvektor $\vec{v}$ der Gerade k durch P und R.

368. a) Welchen Abstand d haben die Punkte $Q_a = (-2|2a|a - 2)$ von der Ebene E: $2x - y + 2z = 1$?
b) Ein Lichtstrahl, der durch den Punkt P = (-5|1|-3) geht, wird auf E im Punkt R so reflektiert, dass er durch den Punkt Q_3 geht. Bestimmen Sie die Koordinaten von R und den Winkel φ zwischen PR und der Senkrechten auf E durch R.
c) Bestimmen Sie a so, dass die Länge von PQ_a minimal ist.
d) Wie groß ist der maximale Schnittwinkel α_a zwischen E und der Geraden l durch Q_a und dem Bildpunkt P' von P? Lösung

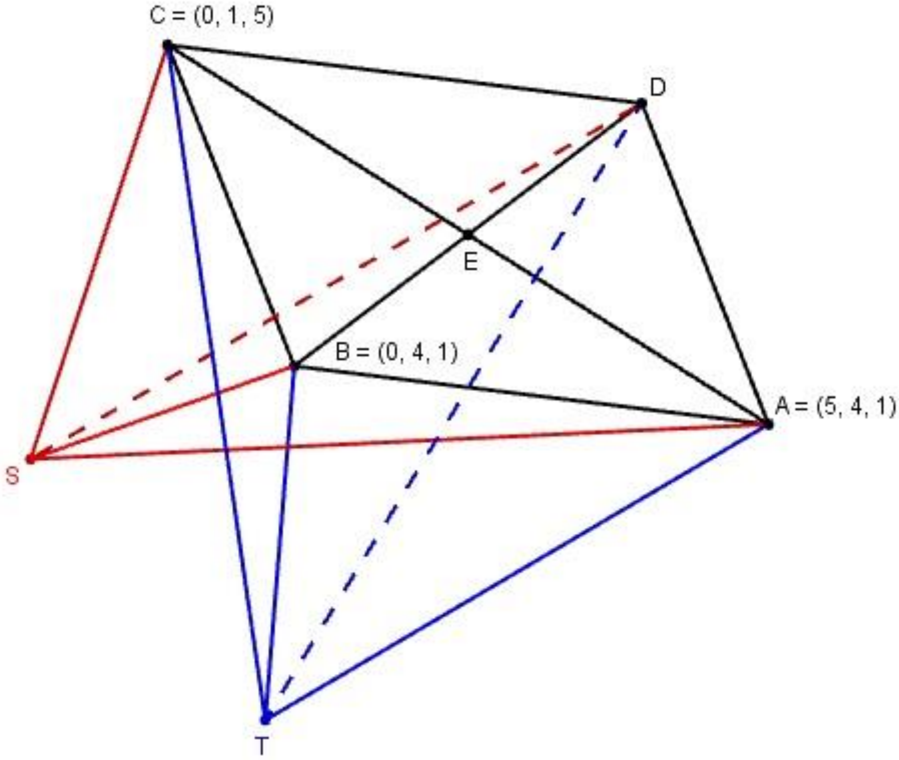
369. Berechnen Sie
a) das Volumen V der dreiseitigen Pyramide aus A = (2|1|0), B = (0|6|-1), C = (-2|4|1) und D = (1|3|7).
b) den Neigungswinkel β der Kante AD gegen die Ebene ABC.
c) den Neigungswinkel φ der Ebene ABD gegen die Ebene ABC.

370. Berechnen Sie
a) den Abstand d des Punktes P von einer Ebene E, die aus dem Würfel ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3 * v2 schneidet.
b) den Abstand e des Punktes P von einer Ebene F, die aus dem Würfel ein regelmäßiges Sechseck schneidet.
c) die Schnittpunkte R und T der Geraden OP mit E und F.
d) Bestimmen sie eine Gleichung der Schnittgeraden g der Ebene E mit der Ebene G:$x + 2y + 3x = 24$.



Lösung

371. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass aus dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck mit A = (5|4|1), B = (0|4|1) und C = (0|1|5) ein Quadrat wird.
b) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes P = (-1|1|0) von der Ebene E durch A, B und C.
c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze P.
d) Wie lauten die Koordinaten der Punkte T und T_1, die die Spitzen einer 6 LE hohen senkrechten Pyramide mit ABCD als Grundfläche darstellen?
e) Welchen Winkel α schließt die Seitenfläche ABT_1 mit der Grundfläche ABCD ein?
f) Welchen Winkel β schließen die Seitenflächen ABT_1 und BCT_1 ein?



372. a) Berechnen Sie den Schnittpunkt D der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E: $2x - 3y + z = 1$.

b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene F, die parallel zu E verläuft und durch den Punkt A = (-5|-4|1) geht.

c) Bestimmen Sie den Abstand d von E zu F.

d) Berechnen Sie die Länge l der Strecke, die von E und F aus g ausgeschnitten wird.

e) Geben Sie eine Parametergleichung für die Ebene G an, die g und die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

f) Bestimmen Sie die Schnittgeraden s von G mit E und t von G mit F.

g) Bestimmen Sie den Abstand e von s und t.

h) Unter welchem Winkel schneidet G die Ebene F?

i) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet E die x - Achse?

k) Die Ebene $E_{(a)}$: $2x - 3y + (2 + a) * z = 3a + 4$ schneidet die z-Achse im Punkt P = (0|0|p). Wie hängt p von a ab?

l) Für welches a existiert kein Schnittpunkt von $E_{(a)}$ mit der z - Achse?

m) Für welches a ist $p > 4$?

n) Für welches a ist $p = a$?

o) Für welches a ist $E = E_{(a)}$? Lösung

Kreis

373. Liegen die Punkte A = (6|2), B = (4|-5) und C = (3|3) auf, im oder außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt bei M = (1|2)

und dem Radius r = 5? A liegt

374. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Umkreises des Dreiecks mit A = (7|0), B = (-5|0) und C = (-7|-2). Lösung

375. Ermitteln Sie die Gleichung des Kreises, der durch den Punkt A = (-1|-8) geht und die x-Achse im Punkt B = (3|0) berührt.

376. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises, der die x- und y-Achse berührt und durch den Punkt P = (1|8) geht. Lösung

377. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises, der die x- Achse berührt und durch den Punkt A = (-1|-1) und B = (6|-8) geht.

378. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises, der die y- Achse berührt und durch die Punkte A = (8|5) und B = (1|-2) geht. Lösung

379. Ein Kreis geht durch die Punkte A = (-2|-1) und B = (5|6) und sein Mittelpunkt M hat zur x-Achse den Abstand a = 2. Wie lautet die Kreisgleichung?

380. Ein Kreis geht durch die Punkte A = (-7|3) und B = (5|-1) und sein Mittelpunkt M liegt auf der Geraden g: x - y = 0. Wie lautet die Kreisgleichung? Lösung

381. Welcher Kreis um M = (15|5) berührt die Gerade g: 7x + 24y = 100? Bestimmen Sie die Kreisgleichung.

382. Welcher Kreis durch die Punkte A = (4|8) und B = (-8|4) berührt die Gerade g:$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$? Bestimmen Sie die Kreisgleichung. Lösung

383. Berechnen Sie die Schnittpunkte S von

a) Gerade g:$\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ mit Kreis K:$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right]^2 = 25$

b) Gerade h:$\vec{x} = \begin{pmatrix}16\\-8\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ mit Kreis L:$\vec{x}^2 + 4 * \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} * \vec{x} = 0$

c) Gerade k:$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ mit Kreis M:$\vec{x}^2 + \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} * \vec{x} - 13 = 0$

384. Berechnen Sie die Länge l der Sehne s und die

Koordinaten ihres Mittelpunktes M, die von der Geraden g: 2x - y - 5 = 0 aus dem Kreis K:$x^2 + y^2 = 25$ ausgeschnitten wird. Lösung

385. Wie lautet die Bedingung für die Mittelpunkte $M_{(S)}$ aller Sehnen, die der Kreis K: $\vec{x}^2 = 100$ aus der Geradenschar $g_{(s)}$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} * \vec{x} = s$ ausschneidet?

386. Für welche Werte von s ist die Gerade g: x - y = s eine Tangente, Sekante oder Passante an den Kreis K: $x^2 + y^2 = 2$? Lösung

387. Für welche Werte von s berühren Geraden der Schar $\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} * \vec{x} = 7 - s$ den Kreis K: $\vec{x}^2 = 25$?

388. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch A = (-2|5) und B = (-1|-2) geht und dessen Mittelpunkt M auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt? Lösung

389. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente g, die den Kreis mit M = (-3|7) und r = 5 im Punkt P = (1|y) für y < 7 berührt.

390. Für welches c berührt die Gerade g: 3x - y = c den Kreis K: $x^2 + y^2 = 10$? Lösung

391. Wie lauten die Koordinaten der Punkte A und B, wo die Gerade g: ax - y = - 5 den Kreis K: $x^2 + y^2 = 5$ berührt?

392. Wie lauten die Gleichungen der Ursprungsgeraden g und h, die aus dem Kreis K: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$ Sehnen der Länge 2 ausschneiden? Lösung

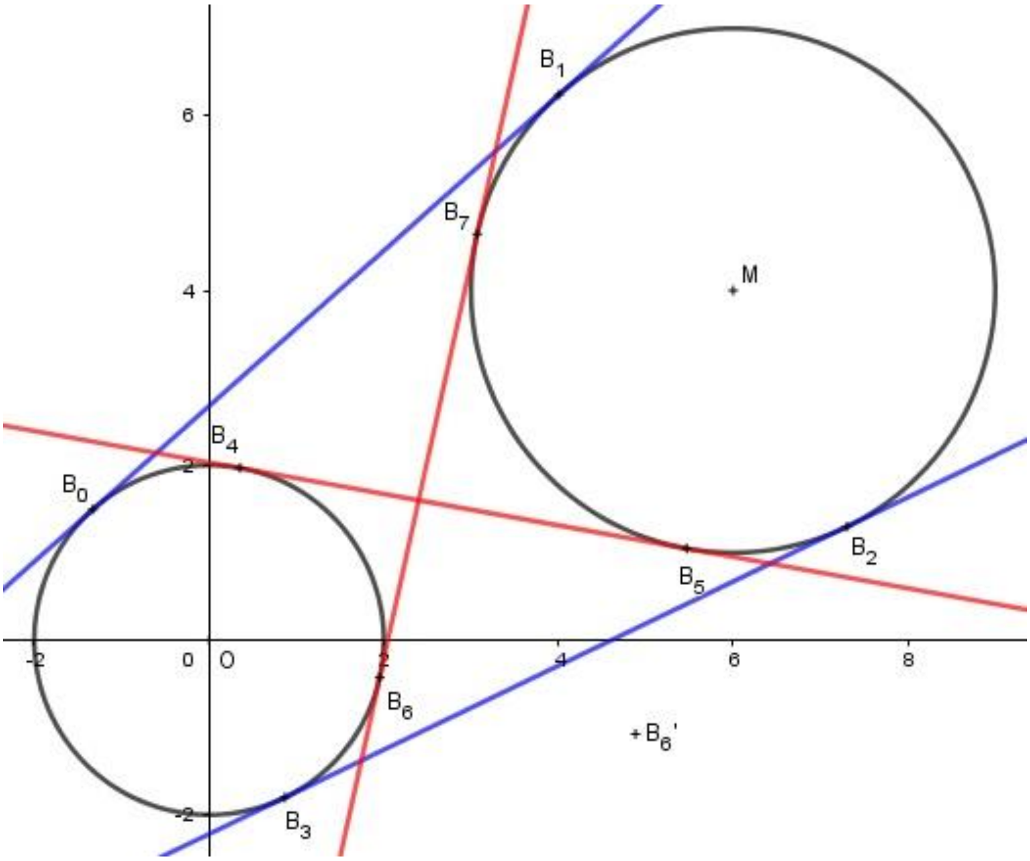
393. Wie lauten die Gleichungen der Tangenten g und h vom Punkt A = (17|7) aus an den Kreis K: $x^2 + y^2 = 169$?

394. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes T der Tangente g:-3x + 4y = 39 an den Kreis K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^2 = 25$. Lösung

395. Unter welchen Voraussetzungen für r und c ist die Gerade g: y = mx + c Tangente an den Kreis K: $x^2 + y^2 = r^2$?
Für welche m ist die Gerade h: y = x + 2 * v2 Tangente an den Kreis mit r = 2?

396. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten g, h (innen)

und k, l (außen) an die Kreise K: $x^2 + y^2 = 4$ und
L: $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 9$ in Koordinatendarstellung.



Lösung

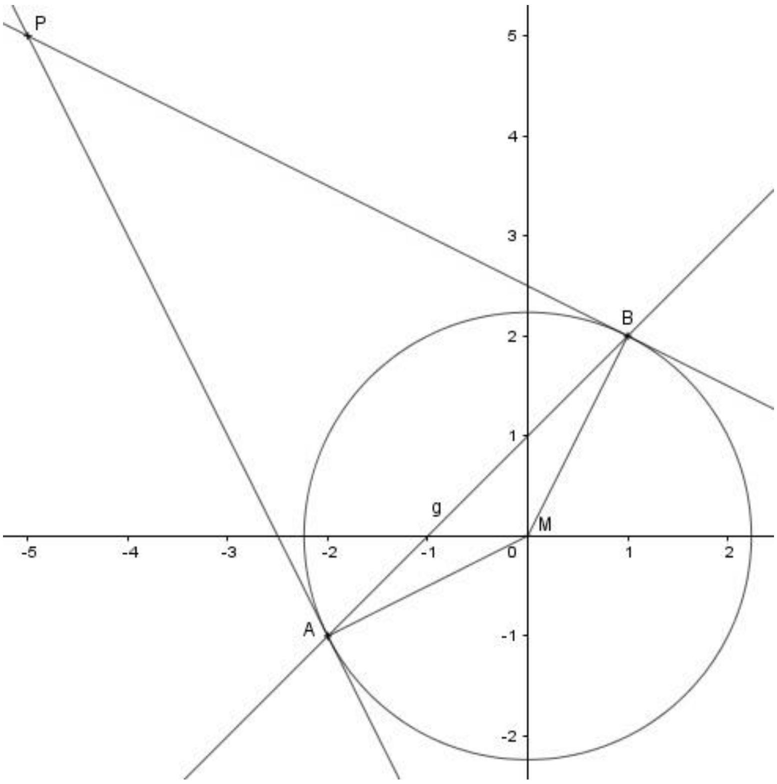
397. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Tangenten die den Kreis K: $x^2 + y^2 = 100$ in den Punkten A = (-8|a) und B = (6|b) berühren, wenn a und b > 0.

398. Bestimmen Sie Gleichungen für die Kreise K mit r = 5, die die Gerade g:3x - 4y = - 36 im Punkt P = (-4|p) berühren.
Lösung

399. a) Bestimmen Sie die Punkte A und B, in denen die Tangenten von P = (-9|8) aus den Kreis K:$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 95$ berühren.
b) Berechnen Sie die Länge l der Sehne AB.
c) Welchen Abstand d hat die Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises?

400. Bestimmen Sie die Schnittpunkte A und B der Kreise
K: $x^2 - 4x + y^2 + 16y - 157 = 0$ und
L: $x^2 - 4x + y^2 - 34y - 107 = 0$, sowie die Schnittwinkel α und β zwischen den Tangenten in A und B.
Lösung

401. Bestimmen Sie einen Punkt P so, dass die Berührpunkte A und B der Tangenten von P aus an den Kreis K:$x^2 + y^2 = 5$ mit den Schnittpunkten von K mit der Geraden g: x - y = -1 übereinstimmen.



402. Bestimmen Sie die Gleichungen der vier Kreise, die die Geraden $g: \vec{x} * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4, h: \vec{x} * \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \text{ und } i: \vec{x} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$ berühren. Lösung

403. Für welchen Punkt P ist die Gerade g durch A = (3|5) und B = (-6|-13) Polare an den Kreis K:$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$? (-8|3)

Kugel, Kugel und Gerade, Kugel und Ebene

404. Liegen die Punkte A = (4|8|-1), B = (4|12|-3), C = (0|12|-5), D = (-2|4|-4) und E = (2|-6|-3) innerhalb, außerhalb oder auf der Kugel K, die um den Nullpunkt und durch den Punkt P = (2|-6|-3) geht? Lösung

405. Für welches z > 0 liegt der Punkt P = (-1|2|z) auf der Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 14y - 4z = 67$?

406. Wie lautet die Kreisgleichung in Koordinaten- und Vektorform, wenn A = (10|-4|11), B = (-6|-6|3) und AB gleich dem Kreisdurchmesser ist? Lösung

407. Wie lauten die Gleichungen der Kreise, die die Kugel mit M = (-6|-2|3) und r = 7 aus den Koordinatenebenen ausschneidet?

408. Wie lautet die Gleichung einer Kugel mit dem Radius r = 9, die die x, y - und die x, z - Ebene berührt und durch den Punkt P = (6|5|2) geht? Lösung

409. Ermitteln Sie die Schnittpunkte P und Q zwischen der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Kugel K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 169$.

410. Ermitteln Sie die Schnittpunkte P und Q zwischen der Geraden g durch die Punkte A = (1|-6|-3) und B = (1|-5|-5) und der Kugel K:$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 12z + 40 = 0$. Lösung

411. Berechnen Sie die Länge l und den Mittelpunkt M einer Sehne, die durch die Gerade g durch die Punkte A = (6|2|9) und B = (6|0|10) aus der Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 = 121$ ausgeschnitten wird.

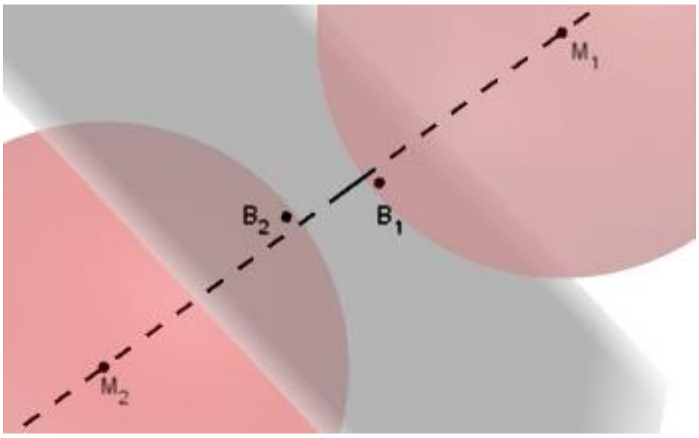
412. Für welche s aus $-\infty < s < \infty$ sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Sekanten, Tangenten oder Passanten an den Kreis K: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$? Lösung

413. Berechnen Sie die kürzeste Entfernung a zwischen den Kugeln mit den Mittelpunkten M_1 = (-7|1|3) und M_2 = (5|5|9) und den Radien $r_1 = 7$ und $r_2 = 3$.

414. Wie groß ist der Radius r der Kugel um M = (-1|-2|3), die die Ebene E:$2x + 5y - z = 11$ berührt? Lösung

415. Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K, die durch die Punkte A = (11|1|3), B = (7|1|7), C = (3|-5|7) und D = (3|-8|-2) geht.

416. Bestimmen Sie die Mittelpunkte M_1 und M_2 der beiden Kugeln mit dem Radius 4, die auf der Geraden g durch P = (0|0|1) und Q = (1|2|2) liegen und ihre Berührpunkte B_1 und B_2 mit der Ebene E:$2x + y + 2z = 8$.



Lösung

417. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene
a) an die Kugel K: $\vec{x}^2$ = 169 im Berührpunkt P = (-12|y|4), wenn y > 0.
b) an die Kugel $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 289$ im Berührpunkt P = (x|-4|14), wenn x < 0.

418. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene T an die Kugel K mit dem Mittelpunkt M = (1|-3|-2) und dem Berührpunkt B = (3|-9|-5). Lösung

419. Wie lautet die Gleichung der Kugel K mit dem Mittelpunkt M = (1|5|1), die die Ebene E: -2x + y + 2z = 10 zur Tangentialebene hat?

420. Wie lauten die Gleichungen der Tangentialebenen S und T, die durch die Schnittpunkte P und Q der Kugel K:x² + y² + z² = 9 mit der Geraden g:$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ gehen?
Unter welchem Winkel α und welcher Schnittgeraden h schneiden sich S und T? Lösung

421. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T im Schnittpunkt der Geraden g:$\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit der Kugel K:x² + y² + z² = 21 in Normalen- und Parameterform.

422. Ist die Schnittebene S der beiden Kugeln K:x² + y² + z² = 81 und L:x² + y² + z² + 6x - 4y - 12z = - 45 auch die Tangentialebene T? Lösung

423. a) Wie lang ist die Sehne s, die die Gerade g:$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

aus der Kugel K: $\vec{x}^2 = 9$ ausschneidet?
b) Wie lauten die Gleichungen der Tangentialebenen S und T in den Schnittpunkten von K mit g?
c) Bestimmen Sie die Schnittgerade h von S und T und deren Schnittwinkel α.

424. Berechnen Sie
a) den Abstand d des Mittelpunktes M = (-3|1|-1) der Kugel K mit r = 6 von den Ebenen E:x - 2y + 2z = 2, F:x - 2y + 2z = 11 und G:x - 2y + 2z = 20.
b) den Schnittpunkt P von E mit der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \vec{n}$, mit $\vec{n}$ als Normalenvektor der Ebenen.
c) den Mittelpunkt M_1 des Schnittkreises von E mit K. Lösung

425. Bestimmen Sie die Berührpunkte B_1 und B_2, deren Abstand d und die Gleichungen der Tangentialebenen E und F an die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, die B_1 und B_2 und die Spannvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthalten?

426. Bestimmen Sie den Berührpunkt B der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit der Kugel K mit dem Mittelpunkt M = (1|-1|6) und $r^2 = 29$ und die Tangentialebene E in der die Gerade g liegt. Lösung

427. Bestimmen Sie den Radius r_1 des Schnittkreises S der Ebene E: x + y = 4 mit der Kugel K mit $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

428. Ermitteln Sie die Gleichung der Kugel K um den Nullpunkt, die die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Tangentialebene hat und deren Berührpunkt B. Lösung

429. Bestimmen Sie den Radius r des Schnittkreises S zwischen den Kugeln K mit dem Mittelpunkt M_1 = (3|-1|-2) und dem Radius $r_1 = 9$ und L mit dem Mittelpunkt M_2 = (7|-8|2) und dem Radius $r_2 = 12$.

430. Bestimmen Sie den Radius r des Schnittkreises S zwischen der Ebene E:5x + 6y - 3z = 11 und der Kugel K:$(x - 3)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$. Lösung

431. Wie groß ist der Radius r der Kugel mit dem Mittelpunkt

M = (5|-1|7), die aus der Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ einen Kreis mit dem Radius 3 ausschneidet.
Berechnen Sie den Mittelpunkt M_1 des Schnittkreises.

432. Die 3 Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ bilden vom Ursprung aus einen Quader.
a) Wie lautet die Gleichung der Kugel K, die durch die Ecken des Quaders geht?
b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M_1 und den Radius r_1 des Schnittkreises, der entsteht, wenn die Ebene E, in der die Grundfläche des Quaders liegt, die Kugel um den Mittelpunkt des Quaders mit dem Radius 5 schneidet. Lösung

433. Bestimmen Sie die Punkte B_1 und B_2, in denen die Ebenen E und F, die durch die Gerade g = PQ mit P = (5|2|1) und Q = (6|2|-1) gehen, die Kugel K:$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$ berühren.

434. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Kugel K, die der quadratischen Pyramide durch A = (3|-3|0), B = (3|3|0), C = (-3|3|0), D = (-3|-3|0) und der Spitze S = (0|0|4) einbeschrieben ist. Lösung

435. Wie lautet die Gleichung der Kugel, die durch die Punkte A = (7|5|6), B = (4|-2|10) und C = (0|1|9) geht und die Ebene E: 2x + 2y + z = 31 berührt?

436. a) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g durch A = (1|0|1) und B = (7|3|-2) mit der Ebene E durch C = (4|3|-2), D = (2|2|0) und E = (4|0|1).
b) Bestimmen Sie einen Punkt F so, dass aus dem Dreieck CDE ein Quadrat wird.
c) Berechnen Sie die Spitzen S_1 und S_2 der Pyramiden mit CDEF als Grundfläche und gleichlangen Seiten- wie Grundkanten.
d) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel, die die Ebene E in C berührt und durch den Punkt G = (7|6|2) geht. Lösung

437. a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks durch A = (2|-1|1), B = (2|5|3) und dem Punkt C auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ für t = 2.
b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide OABC.
c) Die Mitte der Strecke AB sei M. Bestimmen Sie den Punkt D auf der Geraden g, für den die Strecke DM minimal wird.
d) Berechnen Sie die Gleichung der Kugel K um den Ursprung

und deren Berührpunkt P mit der Ebene durch A, B und C?

438. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K, deren Mittelpunkt M der Spiegelpunkt des Ursprungs an der Ebene E durch A = (6|-2|1), B = (3|0|3) und C = (5|-2|2) ist und deren Berührpunkt P mit E.
b) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene T an K parallel zu E aber ungleich E?
c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt N und den Radius r' des Schnittkreises der x, z - Ebene mit K. Lösung

439. a) Bestimmen Sie die Gerade h, die durch den Punkt S = (3|5|13) geht und parallel zur Ebene E durch P = (0|2|5), Q = (2|0|3) und R = (3|3|0) verläuft, sowie ihren Schnittpunkt T mit der Geraden g durch A = (10|15|0) und B = (5|5|10).
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K und ihren Berührpunkt C mit der Ebene E, wenn sie eine zu E parallele Ebene F im Nullpunkt berührt.
c) Berechnen Sie den Radius u der Kugel L mit dem Mittelpunkt M = (3|1|8), die E in einem Kreis mit dem Radius 5 schneidet.

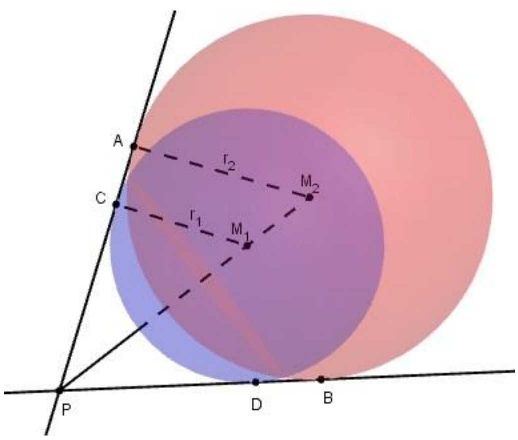
440. Bestimmen Sie die Gleichungen der Kugeln K und L, die durch A = (0|0|0), B = (6|0|0) und C = (0|6|0) verlaufen und die Gerade g durch P = (0|0|10) und Q = (5|0|15) berühren. Lösung

441. Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K, die die Kanten AB, AC, BC der dreiseitigen Pyramide berührt und durch die Ecke D geht, wenn A = (-4|0|0), B = (4|0|0), C = (0|4√3|0) und D = (0|1|3).

442. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M' und den Radius r' des Berührkreises den der Tangentialkegel, Spitze P = (2|-7|3), mit der Kugel K, M = (5|-4|1), Radius r = 4, hat. Lösung

443. Bestimmen Sie die Spitze P und den Öffnungswinkel α des gemeinsamen Tangentialkegels der beiden Kugeln

K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}\right]^2 = 16$ und L: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 9$.



444. a) Bestimmen Sie den Punkt P auf der Kugel K: $\vec{x}^2 = 25$, der von der Ebene E: 3x - 4z + 21 = 0 maximalen Abstand a hat.
b) Für welches c ist die Gerade g durch den Punkt Q = (-5|0|-3) mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\c\end{pmatrix}$ Tangente an K?
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel L mit dem Mittelpunkt M = (0|-3|4), die die Ebene F: x - 2y - 2z = - 15 berührt.
d) Bestimmen Sie den Radius r und den Mittelpunkt M' des Schnittkreises von E mit L. Lösung

445. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K mit dem Mittelpunkt M = (2|-1|3), die durch (0|0|0) geht.
b) Bestimmen Sie die Tangentialebene T an K durch (0|0|0).
c) Berechnen Sie den Mittelpunkt M' und den Radius r' des Kreises, in dem die Ebene F: z = d die Kugel K schneidet.
d) Bestimmen Sie die Gerade h durch den Ursprung mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$, die Tangente an K ist.
e) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M'' und den Radius r'' des Kreises, in dem der Tangentialkegel mit der Spitze S = (3|2|-3) die Kugel K berührt.

446. a) Bestimmen Sie den Radius r der Kugel K mit M = (9|-10|6), die die Ebene E:2x + y - z = 4 berührt.
b) Bestimmen Sie den Radius r' der Kugel um M, die die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$ als Tangente hat.
c) Bestimmen Sie den Radius r' und den Mittelpunkt M' des Berührkreises, den der Tangentialkegel mit der Spitze S = (5|-5|5) an die Kugel um M mit dem Radius r = 4 bildet. Lösung

447. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel L, die die Ebene E durch die Punkte R = (5|2|-7), S = (1|14|3) und parallel zur Geraden g durch die Punkte P = (13|2|9) und Q = (-11|8|3) im Punkt R berührt und g als Tangente hat.
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von g mit der Kugel K (M = (1|2|3), r = 6) und die Tangentialebenen in diesen Punkten.
c) Unter welchem Winkel α schneiden sich diese Tangentialebenen?
d) Bestimmen Sie die Gleichungen der 2 Ebenen F und G, die zu g orthogonal sind und die Kugel K in einem Kreis mit dem Radius r' = 2 schneiden.

448. a) Bestimmen Sie die Normalengleichung für die Ebene
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}1\\-8\\2\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie für die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ k \end{pmatrix}$

k so, dass sie parallel zu E verläuft.
c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden
$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} + u * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit E und deren Schnittwinkel α.
d) In welchem Punkt B berührt die Kugel K um den Nullpunkt die Ebene E? Welchen Radius r hat K? Lösung

449. a) Bestimmen Sie die Ebene E, auf der der Punkt P = (3|2-5) und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegen.
b) Bestimmen Sie die Ebene F, die P enthält und senkrecht zu E verläuft.
c) Welche Gerade der Schar $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit -∞ < k < ∞ ist Tangente T an die Kugel mit M = (6|4|3) und r = $\sqrt{41}$?
d) Bestimmen Sie den Berührpunkt B zwischen T und K.

450. a) Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E durch A = (1|1|0), B = (0|1|1) und C = (1|0|1).
Wie groß ist ihr Abstand d zum Nullpunkt?
b) Wie lauten die Normalengleichungen der Tangentialebenen T und U an die Kugel K: $\vec{x}^2$ = 2, die zu E parallel sind.
c) Berechnen Sie den Mittelpunkt M' und den Radius r' des Kreises, den die Ebene E aus K ausschneidet.
d) Berechnen Sie den Winkel α, den OA mit E einschließt.
e) Wie groß ist das Volumen des Körpers OABC? Lösung

451. a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel K: $\vec{x}^2$ = 26 in den Schnittpunkten P und Q mit der Geraden
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
b) Bestimmen Sie die Schnittgerade h und den Schnittwinkel α der beiden Tangentialebenen.
c) Gibt es eine Tangente t an K in Q mit dem Richtungsvektor
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$?

452. a) Für welches z > 0 liegt der Punkt P = (2|1|z) auf der Kugel K $\vec{x}^2 = 9$?
b) Bestimmen Sie die Tangentialebene T in P an K.

c) Bestimmen sie die Gleichung der Tangente t durch P an K mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$. Lösung

453. a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen S und T durch die Punkte A = (1|2|2) und B = (-2|1|2) an die Kugel K $\vec{x}^2 = 9$?
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g von S und T.
c) Bestimmen Sie den Abstand d von g zum Nullpunkt.
d) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten s und t, die die Kugel in A und B berühren und die Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ haben.
e) Liegt der Schnittpunkt S von s und t auf g?

454. a) Bestimmen Sie die Berührpunkte A und B der Tangentialebenen S und T mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ an die Kugel K: $\vec{x}^2 = 9$.
b) Eine Ebene E mit $\vec{n}$ hat den Abstand 1 vom Nullpunkt. Bestimmen Sie den Radius r' und den Mittelpunkt M' des Schnittkreises mit K.
c) Berechnen Sie das Volumen der regelmäßigen Pyramide, die durch die Schnittpunkte von K mit der x, y und der positiven z-Achse bestimmt wird. Lösung

455. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T an die Kugel K, (mit M = (1|2|-2) und r = 3) durch den Nullpunkt.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene U die parallel zu T verläuft?
c) Ist die Ebene E, in der die Geraden der Schar $g_{(k,r)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} r \\ 2 * (k - r) \\ -k \end{pmatrix}$ liegen, Tangentialebene an K? Wenn ja, bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes C?
d) Sind die Geraden der Schar für k = 0 Tangenten an K?

456. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes A der Kugel K (M = (0|0|0)) mit der Ebene E: 2x + y + 2z = 18.
b) Bestimmen Sie die Schnittgerade h von E mit der Ebene F, die duch die Gerade $g_{(2)}$ aus der Geradenschar $g_{(k)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 + 2k \\ -2 \\ -2k \end{pmatrix}$ k > 0 und dem Nullpunkt gebildet wird.
c) Bestimmen Sie k aus der Geradenschar so, dass die Gerade $g_{(k)}$ die Kugel K berührt.
d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks, das durch die Schnittpunkte B, C und D der Ebene E mit den Koordinatenachsen gebildet wird. Lösung

457. a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangentialebenen S und T in den Schnittpunkten A und B der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit der Kugel K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 49.$

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel α zwischen S und T.
c) Berechnen Sie den Abstand d von B zu T.
d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes P der Gerade
h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ an K.
e) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel L, auf der alle Punkte liegen, von denen aus A und B unter einem rechten Winkel erscheinen.

458. a) Berechnen Sie den Radius r der Kugel K mit dem Mittelpunkt M = (-2|0|6) so, dass die Ebene E, gebildet durch die Geraden
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, Tangentialebene ist.

b) Gibt es ein k, für das die Gerade aus der Schar $g_{(k)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
∞ < k < ∞ Tangente an K ist?
c) Die Geraden der Schar liegen alle in derselben Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung für F. Lösung

459. a) Bestimmen Sie k in der Geradenschar $g_{(k)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ k \end{pmatrix}$ so, dass die Gerade $g_{(k)}$ parallel zur Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft.

b) Bestimmen Sie den Berührpunkt B der Kugel K (M = (0|0|0)) mit E als Tangentialebene.

460. a) Bestimmen Sie den Berührpunkt B und den Radius r der Kugel K mit M = (-2|-1|1), wenn die Ebene E: 2x + y + 2z = 15 Tangentialebene sein soll.
b) Bestimmen Sie eine Gerade h aus der Geradenschar
$g_{(k)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2k+1 \\ -2 \\ -2k \end{pmatrix}$, die Tangente an K ist. Lösung

461. a) Für welche positiven a, b, c sind die Ebenenscharen
$E_{(a)}$: 2x + 2y + az = 18, $F_{(b)}$: - x + 2y + bz = 18 und
$G_{(c)}$: x - 2y + cz = 18 Tangentialebene an die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$?
b) In welchem Punkt S schneiden sich die 3 Ebenen?
c) Wie groß ist das Volumen V einer Pyramide, die von den Punkten S,

T = (0|0|0), U = (9|0|0) und V = (0|9|0) gebildet wird?

462. a) Für welche k ist die Ebene $E_{(k)}$: kx + 3y = 3 Tangentialebene an die Kugel K (M = (7|2|1) und r = 5)?
b) Berechnen Sie den Radius r' einer zur K konzentrischen Kugel L, die die Gerade g durch die Punkte P = (5|3|-6) und Q = (5|7|-9) als Tangente hat. Lösung

463. a) Für welches k geht eine Kugel der Schar $K_{(k)}: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2k \\ k+3 \\ -2k \end{pmatrix}\right]^2 = 9k^2$ durch den Nullpunkt?
b) In welchen Punkten $B_{1,2}$ berührt eine Kugel der Schar die x, z - Ebene?
c) In welchem Punkt P berühren alle Kugeln der Schar die Ebene
E: 2x + y - 2z = 3?
d) Für welche Werte von n sind Geraden der Parallelenschar
$g_{(n)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $-\infty < n < \infty$ Tangenten an $K_{(1)}$?

464. a) Bestimmen Sie die Länge l der Sehne, die von der Kugel
$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^2 = 36$ aus der Geraden g durch die Punkte A = (1|-1|3) und B = (2|-1|3) ausgeschnitten wird?
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M' und den Radius r' des Schnittkreises der Ebene E: x + y + z = 4 mit K.
c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T, die K in A berührt.
d) Für welche k schneiden Ebenen der Schar $E_{(k)}$: 2x + 2y + z = k, die parallel zu T verlaufen, die Kugel K?
e) Welche Ebene aus $E_{(k)}$ schneidet aus der Kugel einen Kreis mit dem Radius r_1 = 2 * v5 aus?
f) Wie lautet eine Gleichung der Kugel L, die durch Spiegelung von K an E entsteht? Lösung

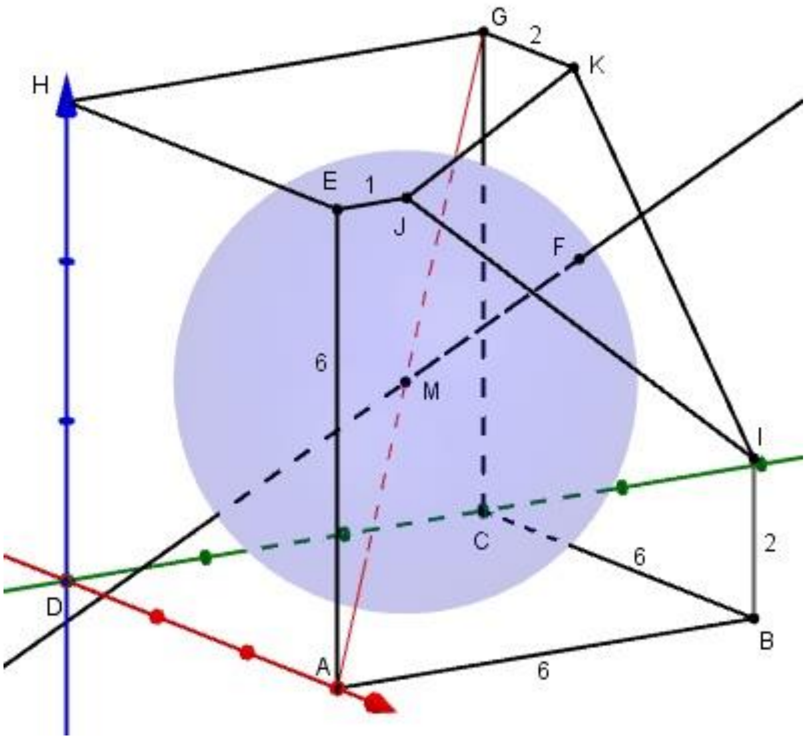
465. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g in der x, y - Ebene, auf der alle Mittelpunkte $M_{(k)}$ der Kugelschar $K_{(k)}: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -k \\ 2k \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = k^2$ liegen.
b) Bestimmen Sie die Berührpunkte $B_{1,2}$ der Geraden $h: \vec{x} = r * \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = s * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an jede Kugel aus $K_{(k)}$.
c) Bestimmen Sie die Gleichung des Schnittkreises von $K(_2)$ und $K_{(3)}$.

466. a) Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt S der Geraden g durch den Punkt P = (5|4|9), wenn sie die Kugel

$K: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 81$ im Punkt $Q = (7|3|z)$ mit $z > 5$ schneidet.
b) Berechnen Sie den Radius r' der Kugel so, dass g Tangente ist?
Lösung

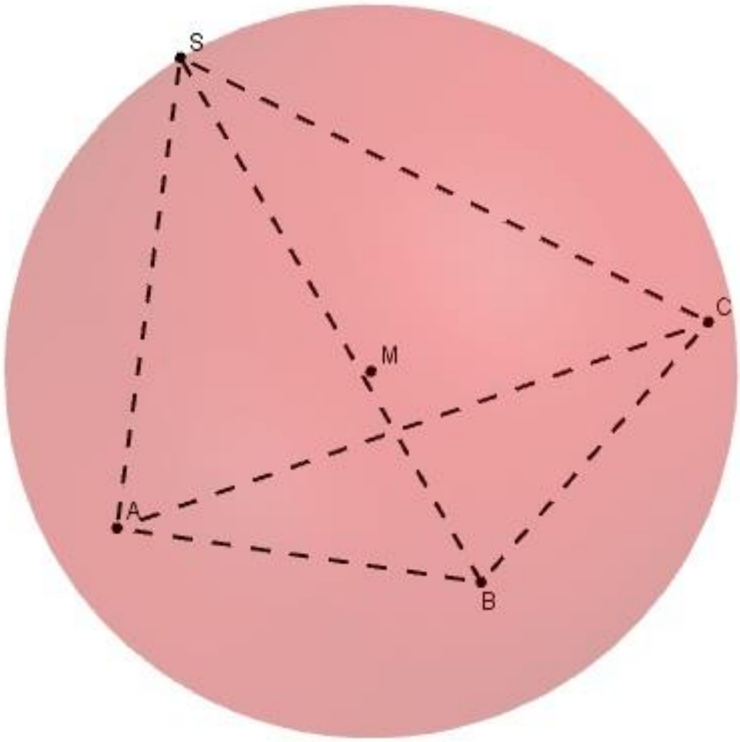
467. a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Kugeln K und L, die den Kegel mit der Spitze $S = (0|0|8)$, dem Öffnungswinkel $\alpha = 60°$ und die Ebene $E: y + 2z = 6$ berühren.
b) Bestimmen Sie die Berührpunkte B und C von K und L mit E.

468. Bestimmen Sie den Radius r der größten Kugel K, die in den Würfel mit der abgeschnittenen Ecke passt, wenn ihr Mittelpunkt M auf der Raumdiagonalen AG liegen soll.



Lösung

469. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K, die durch die Eckpunkte der Pyramide geht, die durch die Ebenen $E: 13x - 19y - 5z = 25$.
$F: 14x - 23y - 2z = 43$, $G: 10x - 18y - 3z = 15$ und $H: 21x - 29y - 3z = 37$ gebildet wird.
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene an die Kugel K in der Spitze S der Pyramide.



470. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K mit dem Mittelpunkt M = (5|2|10), die die Ebene E durch A = (8|0|-1), B = (8|1|3) und C = (10|1|2) berührt.
b) Bestimmen Sie das Volumen V des geraden Kreiskegels mit der Spitze M und der Mantellinie MP, wenn sein Grundkreis in der Ebene F durch P = (2|-2|4), Q = (8|-3|2) und R = (4|4|-6) liegt. Lösung

471. a) Bestimmen Sie den Berührpunkt B der Kugel K, M = (6|4|3), r = 3 * v5, mit der Ebene E durch A = (6|-5|3) und senkrecht zu $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie a so, dass die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Tangente an K ist.

472. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene E im Nullpunkt an die Kugel K, M = (1|-2|2) und r = 3.
b) Bestimmen Sie den Berührpunkt B der zu E parallelen Ebene F an K.
c) Bestimmen Sie die Kreisgleichung für den Kreis L, den die x, y - Ebene aus K ausschneidet.

c) Wie lang ist die Strecke s, die K aus der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ausschneidet?
d) Bestimmen Sie die Mittelpunkte $M_{1,2}$ der Kugeln mit dem Radius 10, die E im Nullpunkt berühren. Lösung

473. a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte P und Q der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Kugel $K: \vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} * \vec{x} - 35 = 0$.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene E an K durch P in Normalenform.
c) Wie liegt die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu K?

474. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K, die die Ebene F in A = (5|4|0) berührt und F orthogonal zur Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft und wenn der Mittelpunkt M von K auf der Ebene $E_{(1)}$ der Ebenenschar $E_{(a)}$ = 5x - ay + 3z - 3a = 0 a ≥ 0 liegt.
b) Für welche a schneidet $E_{(a)}$ die Kugel L mit M' = (0|6|0) mit dem Radius r = 8? Lösung

475. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K mit M = (1|1|2), die die Ebene E: 2x + y - 4z = 7 berührt.
b) Schneidet jede Gerade der Schar $g_{(u)}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ K in 2 Punkten?

476. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K mit r = 5, deren Mittelpunkt M auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt und von den Ebenen $E: \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} * \vec{x} = 14$ und F, die durch den Punkt P = (2|1|11) geht und parallel zu E verläuft, in zwei kongruenten Kreisen geschnitten wird.
b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M' und den Radius r' des Schnittkreises von E mit K. c) Bestimmen Sie die Gleichung für eine Tangentialebene G, die orthogonal zur y - Achse verläuft und K berührt. Lösung

477. a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r der Kugel K, die der dreiseitigen Pyramide, die durch die 3 Koordinatenebenen und die Ebene E durch die Punkte A = (2|1|1), B = (6|1|-1) und C = (4|-5|6) gebildet wird, einbeschrieben ist.
b) Bestimmen Sie den Berührungspunkt B von K mit E.
c) Bestimmen Sie Gleichungen für die Tangentialebenen T und U in den Schnittpunkten R und S der Geraden g durch die Punkte P = (4|5|-1) und Q = (8|11|-3) mit der Kugel L um A und dem Radius v8.

478. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Mantellinie m des Kreiskegels K, (Spitze S = (2|1|5), schneidet die x, y- Ebene in einem Kreis N mit dem Radius r = 3), die parallel zur Ebene E: 5y - 3z = 10 verläuft.
b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r der Kugel L, die K als Tangentialkegel hat und E berührt.

c) Bestimmen Sie den Berührpunkt L von K an E. Lösung