Anwendungen Aufgabe 212

1974 betrug der Bleibedarf 3,39 Millionen t. Bei gleich bleibendem Bedarf sollte der Vorrat bis 2021 reichen. Wie groß war der Bleivorrat? Wie lange reicht der Vorrat, wenn man von einem jährlichen Bedarfszuwachs von 3% ausgeht? Wie lange reicht er bei einem Zuwachs von 3%, wenn 40% des Bedarfs durch Wiederverwendung gedeckt werden?

Von 1974 – 2021 sind es 47 Jahre.

Vorrat = 47 Jahre * 3,39 Mio. t/Jahr **= 159,3 Mio. t**

Wachstumsfaktor q = 1,03

	Vorrat Mio. t	Abbau Mio. t
1.Jahr	159,3	3,39
2. Jahr	159,3 – 3,39	3,39 * 1,03
3. Jahr	159,3 – 3,39 – 3,39 * 1,03	$3,39 * 1,03^2$
.		
.		
.		
n-2 tes Jahr	....	$3,39 * 1,03^{n-3}$
n-1 tes Jahr	....	$3,39 * 1,03^{n-2}$
n tes Jahr	....	$3,39 * 1,03^{n-1}$

Vorrat im n-ten Jahr und 3,39 ausgeklammert:

$$V = 159,3 - 3,39*(1,03 + 1,03^2 + 1,03^3 \ldots + 1,03^{n-3} + 1,03^{n-2} + 1,03^{n-1})$$

In der Klammer steht eine geometrische Reihe, deren Summe ist:

$$S_n = \frac{1 - 1,03^n}{1 - 1,03}$$

Somit:

$$V = 159,3 - 3,39 * \frac{1 - 1,03^n}{1 - 1,03}$$

$$V = 159{,}3 - 3{,}39 * \frac{1 - 1{,}03^n}{-0{,}03}$$

$$V = 159{,}3 + 3{,}39 * \frac{1 - 1{,}03^n}{0{,}03}$$

Für V = 0, d. h. Vorrat aufgebraucht, gilt:

$$0 = 159{,}3 + 3{,}39 * \frac{1 - 1{,}03^n}{0{,}03} \quad | * 0{,}03$$

$$0 = 4{,}779 + 3{,}39 * (1 - 1{,}03^n) \quad | -4{,}779$$

$$-4{,}779 = 3{,}39 * (1 - 1{,}03^n) \quad | :3{,}39$$

$$\frac{-4{,}779}{3{,}39} = 1 - 1{,}03^n$$

$$-1{,}41 = 1 - 1{,}03^n \quad | +1{,}03^n$$

$$1{,}03^n - 1{,}41 = 1 \quad | +1{,}41$$

$$1{,}03^n = 2{,}41$$

Logarithmieren:

$$\lg 1{,}03^n = \lg 2{,}41$$

$$n * \lg 1{,}03 = \lg 2{,}41 \quad | :\lg 1{,}03$$

$$\mathbf{n} = \frac{\lg 2{,}41}{\lg 1{,}03} = \frac{0{,}382}{0{,}0128} \mathbf{= 29{,}8\ Jahre}$$

	Abbau Mio. t		40% Mio. t		tatsächlicher Vorratsabbau Mio. t
1.Jahr	3,39	-	0,4 * 3,39	=	0,6 * 3,39
2. Jahr	3,39 * 1,03	-	0,4 * 3,39 * 1,03	=	0,6 * 3,39 * 1,03
3. Jahr				=	0,6 * 3,39 * 1,03²

.

.
.
n-2 tes Jahr .... $= 0,6 * 3,39 * 1,03^{n-3}$

n-1 tes Jahr .... $= 0,6 * 3,39 * 1,03^{n-2}$

n tes Jahr .... $= 0,6 * 3,39 * 1,03^{n-1}$

Vorrat im n-ten Jahr und wieder 3,39 ausgeklammert:

$V = 159,3 - 0,6 * 3,39 * (1,03 + 1,03^2 + ... + 1,03^{n-2} + 1,03^{n-1})$

$$V = 159,3 - 0,6 * 3,39 * \frac{1 - 1,03^n}{1 - 1,03}$$

$$V = 159,3 - 0,6 * 3,39 * \frac{1 - 1,03^n}{- 0,03}$$

$$V = 159,3 + 0,6 * 3,39 * \frac{1 - 1,03^n}{0,03}$$

Für V = 0, d. h. Vorrat aufgebraucht gilt:

$$0 = 159,3 + 0,6 * 3,39 * \frac{1 - 1,03^n}{0,03} \quad | * 0,03$$

$0 = 4,779 + 0,6 * 3,39 * (1 - 1,03^n) \mid -4,779$

$- 4,779 = 0,6 * 3,39 * (1 - 1,03^n) \mid :0,6 * 3,39$

$$\frac{- 4,779}{0,6 * 3,39} = 1 - 1,03^n$$

$- 2,35 = 1 - 1,03^n \mid +1,03^n$

$1,03^n - 2,35 = 1 \mid +2,35$

$1,03^n = 3,35$

Logarithmieren:

$\lg 1,03^n = \lg 3,35$

$$n \cdot \lg 1{,}03 = \lg 3{,}35 \quad | :\lg 1{,}03$$

$$\mathbf{n} = \frac{\lg 3{,}35}{\lg 1{,}03} = \frac{0{,}525}{0{,}0128} \mathbf{= 41\ Jahre}$$