

Extrem Aufgabe 101

Wie groß ist der Radius r eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel, der bei gegebenem Oberflächeninhalt O maximales Volumen V hat?

Zielfunktion:

$V =$ Zylindervolumen + Halbkugelvolumen

$$V = \pi * r^2 * h + \frac{2}{3} * \pi * r^3$$

Nebenbedingung:

$O =$ (Grundfläche + Mantelfläche) Zylinder + Halbkugeloberfläche

$$O = \pi * r^2 + 2 * \pi * r * h + 2 * \pi * r^2$$

$$O = 3\pi r^2 + 2\pi r h \quad | -3\pi r^2$$

$$O - 3\pi r^2 = 2\pi r h \quad | :2\pi r$$

$$h = \frac{O - 3\pi r^2}{2\pi r} = \frac{O}{2\pi r} - \frac{3}{2} * r$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V(r) = \pi * r^2 * \left(\frac{O}{2\pi r} - \frac{3}{2} r \right) + \frac{2}{3} * \pi * r^3$$

$$V(r) = \frac{O}{2} r - \frac{3}{2} * \pi * r^3 + \frac{2}{3} * \pi * r^3$$

$$V(r) = \frac{O}{2} r - \frac{5}{6} * \pi * r^3$$

Zur Berechnung der Intervallgrenzen:

$$\frac{O}{2} r - \frac{5}{6} * \pi * r^3 = 0 \quad | *6$$

$$3Or - 5 * \pi * r^3 = 0$$

$$r * (3 * 0 - 5 * \pi * r^2) = 0$$

$$r_1 = 0$$

$$30 - 5 * \pi * r^2 = 0 \quad | + 5 * \pi * r^2$$

$$5\pi r^2 = 30 \quad | :5\pi$$

$$r^2 = \frac{30}{5\pi} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{3*0}{5\pi}} \qquad 0 < r < \sqrt{\frac{3*0}{5\pi}}$$

$$V'(r) = \frac{0}{2} - \frac{5}{2} * \pi * r^2$$

$$\frac{0}{2} - \frac{5}{2} * \pi * r^2 \quad | *2$$

$$0 - 5\pi r^2 = 0 \quad | +5\pi r^2$$

$$5\pi r^2 = 0 \quad | :5\pi$$

$$r^2 = \frac{0}{5\pi} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$r = \sqrt{\frac{0}{5\pi}}$$

$$h = \frac{0}{2 * \pi * \sqrt{\frac{0}{5\pi}}} - \frac{3}{2} * \sqrt{\frac{0}{5\pi}}$$

$$h = \frac{0 - 3 * \pi * \frac{0}{5\pi}}{2 * \pi * \sqrt{\frac{0}{5\pi}}} = \frac{\frac{2}{5} * 0}{2 * \pi * \sqrt{\frac{0}{5\pi}}} = \sqrt{\frac{0}{5\pi}} = r$$

$$V''(r) = -5 * \pi * r < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

$$V(\sqrt{\frac{0}{5\pi}}) = \pi * \frac{0}{5 * \pi} * \sqrt{\frac{0}{5\pi}} + \frac{2}{3} \pi * \frac{0}{5 * \pi} * \sqrt{\frac{0}{5\pi}}$$

$$V(\sqrt{\frac{0}{5\pi}}) = \sqrt{\frac{0}{5\pi}} * (\frac{0}{5} + \frac{2 * 0}{15}) = \sqrt{\frac{0}{5\pi}} * \frac{0}{3} \text{ absolutes Maximum, weil}$$

$$V(0) = \frac{0}{2} * 0 - \frac{5}{6} * \pi * 0^3 = 0 < \sqrt{\frac{0}{5\pi}} * \frac{0}{3}$$

$$V(\sqrt{\frac{3 * 0}{5\pi}}) = \frac{0}{2} * \sqrt{\frac{3 * 0}{5\pi}} - \frac{5}{6} * \frac{3 * 0}{5 * \pi} * \pi * \sqrt{\frac{3 * 0}{5\pi}} = 0 < \sqrt{\frac{0}{5\pi}} * \frac{0}{3}$$