Extrem Aufgabe 103

Ein oben offener Karton mit quadratischer Grundfläche hat ein Volumen von 10 cm³. Wie groß ist seine Höhe h, wenn seine Oberfläche O minimal sein soll?

Zielfunktion:

a = Länge der Grundseite

$O = a^2 + 4 * a * h$

Nebenbedingung:

$10 = a^2 * h \; |:a^2$

$h = \frac{10}{a^2}$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$O_{(a)} = a^2 + 4 * a * \frac{10}{a^2}$

$O_{(a)} = a^2 + \frac{40}{a}$ $\qquad 0 < a < \infty$ cm

$O'_{(a)} = 2a - \frac{40}{a^2}$

$2a - \frac{40}{a^2} = 0 \; | *a^2$

$2a^3 - 40 = 0 \; |+40$

$2a^3 = 40 \; | :2$

$a^3 = 20 \; |\sqrt[3]{\;\;}$

$a = 2{,}71$ cm

$h =$ $\frac{10}{2{,}71^2}$ cm = **1,36 cm**

$$O''_{(a)} = 2 + \frac{80}{a^3} > 0 \rightarrow \text{Minimum}$$

$O_{(2,71)} = 2{,}71^2 + 4 * 2{,}71 * 1{,}36\ cm^2 = 22{,}1\ cm^2$ absolutes Minimum,

weil

$$O_{(0)} = 0^2 + \frac{40}{0} = \infty > 22{,}1\ cm^2$$

$$O_{(0)} = \infty^2 + \frac{40}{\infty} = \infty^2 > 22{,}1\ cm^2$$