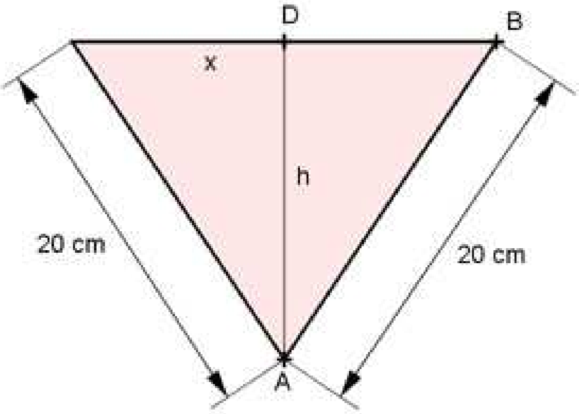
Extrem Aufgabe 105

Wie groß ist die Grundseite x der Rinne, wenn sie maximales Volumen V fasssen soll?



Das maximale Volumen V entsteht dann, wenn die Grundfäche G der Rinne am größten ist, weil

$V = G * l$

l = Länge der Rinne

Zielfunktion:

$$G = \frac{x * h}{2}$$

$$G^2 = \frac{x^2 * h^2}{4}$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ABD:

$$20^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \quad | - \frac{x^2}{4}$$

$$h^2 = 400 - \frac{x^2}{4} = \frac{1\,600 - x^2}{4} \quad |\sqrt{}$$

$$h = \frac{1}{2} * \sqrt{1600-x^2} \qquad 0 < x < 40$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$G^2_{(x)} = \frac{x^2 * (1\,600 - x^2)}{16} = \frac{1\,600x^2 - x^4}{16}$$

Zu untersuchende Funktion:

$G^2_{(x)} = 1\,600x^2 - x^4$

$G^{2\prime}_{(x)} = 3\,200x - 4x^3$

$3\,200x - 4x^3 = 0 \;|:4$

$x * (800 - x^2) = 0$

$x_1 = 0$ keine Lösung

$800 - x^2 = 0 \;|\; +x^2$

$x^2 = 800 \;|\sqrt{}$

x = 28,3 cm gerundet

$$h^2 = \frac{1\,600 - 800}{4} \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2 \;|\sqrt{}$$

h = 14,1 cm gerundet

$G^{2\prime\prime}_{(x)} = 3\,200 - 12x^2$

$G^{2\prime\prime}_{(28,3)} = 3\,200 - 12 * (28,3)^2 = -\,6\,410,7 < 0 \text{ --> Maximum}$

$$G_{(28,3)} = \frac{28,3 * 14,1}{2} \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2$$ gerundet, absolutes Maximum, weil

$$G_{(0)} = \frac{0 * \sqrt{1600-0^2}}{4} = 0 \text{ cm}^2 < 200 \text{ cm}^2$$

$$G_{(40)} = \frac{40 * \sqrt{1600-40^2}}{4} = 0 \text{ cm}^2 < 200 \text{ cm}^2$$