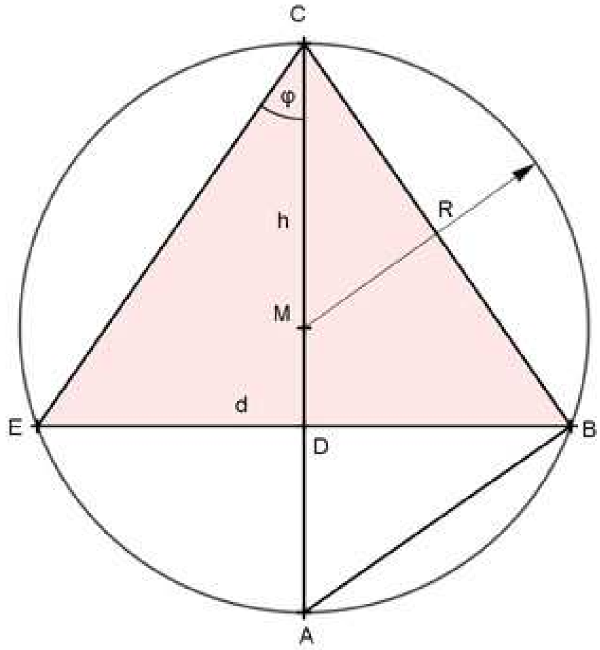
Extrem Aufgabe 107

Wie groß ist der Winkel φ des Kegels, der der Kugel mit dem gegebenen Radius R einbeschrieben ist, wenn sein Volumen V maximal sein soll?



$CD = h$

$AD = 2r - h$

$ED = DB = r = d/2$

Zielfunktion:

$$V = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$

Nebenbedingung:

$$\tan \varphi = \frac{ED}{DC} = \frac{r}{h}$$

Höhensatz im Dreieck ABC:

$BD^2 = (2R - DC) * DC$

$r^2 = (2R - h) * h$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(h)} = \frac{\pi * (2R - h) * h * h}{3}$$

$$V_{(h)} = \frac{\pi}{3} * (2Rh^2 - h^3)$$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(h)} = 2Rh^2 - h^3 \qquad 0 < h < 2R$

$V'_{(h)} = 4Rh - 3h^2$

$4Rh - 3h^2 = 0$

$h * (4R - 3h) = 0$

$h_1 = 0$ keine Lösung

$4R - 3h = 0 | +3h$

$3h = 4R | :3$

$$h = \frac{4}{3} * R$$

$$r^2 = (2R - \frac{4}{3} R) * \frac{4}{3} R$$

$$r^2 = \frac{8}{9} * R^2 \; |\sqrt{}$$

$$r = \frac{2}{3} * R * \sqrt{2}$$

$V''_{(h)} = 4R - 6 * h$

$$V''_{(4/3 * R)} = 4R - 6 * \frac{4}{3} * R = -4R < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$V_{(4/3*R)} = \frac{\pi * \frac{8}{9} * R^2 * \frac{4}{3} * R}{3} = \frac{32}{81} * \pi * R^3$$

absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = 2R * 0 - 0^3 = 0 < \frac{32}{81} * \pi * R$$

$$V_{(2R)} = 2R * (2R)^2 - (2R)^3 = 0 < \frac{32}{81} * \pi * R$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{2}{3} R * \sqrt{2}}{\frac{4}{3} * R} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071 \text{ --> } \boldsymbol{\varphi = 35{,}3° \text{ gerundet}}$$