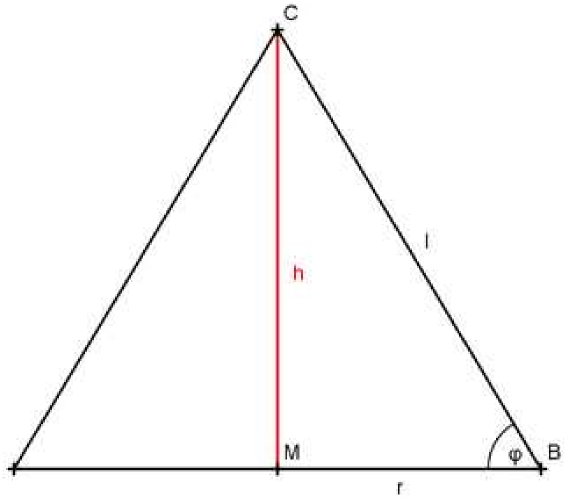
Extrem Aufgabe 111

In welcher Höhe h muss eine Lampe vertikal und mittig über dem Tisch mit dem Radius r angebracht sein, damit die Lichtstärke $L = k * \sin \varphi / l^2$ mit k = konstant im Punkt A maximal ist?



Zielfunktion:

$$L = k * \frac{\sin \varphi}{l^2}$$

Nebenbedingung:

Satz von PYthagoras im Dreieck MBC:

$$l^2 = h^2 + r^2 \quad |\sqrt{}$$

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Im Dreieck MBC gilt:

$$\sin \varphi = \frac{h}{l}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$L = k * \frac{h}{l * l^2}$$

$$L_{(h)} = k * \frac{h}{(h^2 + r^2) * \sqrt{h^2 + r^2}} \qquad 0 < h < \infty$$

Zu untersuchende Funktion:

$$L_{(h)} = h * (h^2 + r^2)^{-3/2}$$

Produktregel und Kettenregel:

$u' = 1$

$$v' = -\frac{3}{2} * 2h * (h^2 + r^2)^{-5/2}$$

$$L'_{(h)} = 1 * (h^2 + r^2)^{-3/2} - 3h * (h^2 + r^2)^{-5/2} * h$$

$$L'_{(h)} = (h^2 + r^2)^{-3/2} * (1 - 3h^2 * (h^2 + r^2)^{-2/2})$$

$$(h^2 + r^2)^{-3/2} * (1 - 3h^2 * (h^2 + r^2)^{-2/2}) = 0 \mid : (h^2 + r^2)^{-3/2} \text{ mit } h^2 + r^2 > 0$$

$$1 - \frac{3h^2}{h^2 + r^2} = 0 \mid *(h^2 + r^2)$$

$$h^2 + r^2 - 3h^2 = 0 \mid +2h^2$$

$$2h^2 = r^2 \mid :2$$

$$h^2 = \frac{r^2}{2} \mid \sqrt{\ }$$

$$\mathbf{h = \frac{r}{\sqrt{2}}}$$

$$l^2 = \frac{r^2}{2} + r^2 = \frac{3}{2} * r^2 \mid \sqrt{\ }$$

$$l = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} * r = \sqrt{3} * h$$

Zur Beurteilung, ob $L''_{(h)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$$L'_{(h)} = \frac{h^2 + r^2 - 3h^2}{h^2 + r^2}$$

$$u' = -4h$$

$$L''_{(h)} = \frac{u'}{v} = \frac{-4h}{h^2 + r^2} < 0 \dashrightarrow \text{Maximum}$$

$$L_{(r/\sqrt{3})} = k * \frac{r}{\sqrt{2} * \left(\frac{\sqrt{3} * r}{\sqrt{2}}\right)^3} = k * \frac{2}{3 * \sqrt{3} * r^2}$$

absolutes Maximum, weil

$$L_{(0)} = k * \frac{0}{(0^2 + r^2) * \sqrt{0^2+r^2}} = 0 < k * \frac{2}{3 * \sqrt{3} * r^2}$$

$$L_{(\infty)} = k * \frac{\infty}{(\infty^2 + r^2) * \sqrt{\infty^2+r^2}} \dashrightarrow 0 < k * \frac{2}{3 * \sqrt{3} * r^2}$$