Extrem Aufgabe 113

Ein Rechteck mit dem Umfang a rotiert um eine seiner Seiten. Wie groß ist die kleinere Seite der Rechteckseiten x und y, wenn das entstehende Zylindervolumen V maximal sein soll?

Zielfunktion:

$V = \pi * x^2 * y$

Nebenbedingung:

$a = 2x + 2y \mid -2x$

$2y = a - 2x \mid :2$

$y = \dfrac{a - 2x}{2}$ $\qquad 0 < y < a/2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(x)} = \frac{\pi * x^2 * (a - 2x)}{2} = \frac{\pi * (ax^2 - 2x^3)}{2} \qquad 0 < x < a/2$$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(x)} = ax^2 - 2x^3$

$V'_{(x)} = 2ax - 6x^2$

$2ax - 6x^2 = 0$

$2x * (a - 3x) = 0$

$2x = 0 \mid :2$

$x_1 = 0$ keine Lösung

$a - 3x = 0 \mid +3x$

$3x = a \mid :3$

$x = \dfrac{a}{3}$

$$\mathbf{y} = \frac{a - 2 * a/3}{2} = \mathbf{\frac{a}{6}}$$

$V''_{(x)} = 2a - 12x$

$V''_{(a/3)} = 2a - 4a = - 2a < 0$ --> Maximum

Volumen V bei Rotation um die kürzere Seite y:

$$V = \pi * \left(\frac{a}{3}\right)^2 * \frac{a}{6}\ cm^3 = \pi * \frac{a^3}{54}$$

absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = \pi * \left(\frac{a * 0^2 - 2 * 0^3}{2}\right) = 0\ cm^3 < \frac{a^3}{54}$$

$$V_{(a/2)} = \pi * \left(\frac{a * (a/2)^2 - 2 * (a/2)^3}{2}\right) = 0\ cm^3 < \frac{a^3}{54}$$

Volumen V bei Rotation um die längere Seite x:

$$V = \pi * \left(\frac{a}{6}\right)^2 * \frac{a}{3}\ cm^3 = \pi * \frac{a^3}{108}$$

gleiche Überlegung für das absolute Maximum wie vorher.