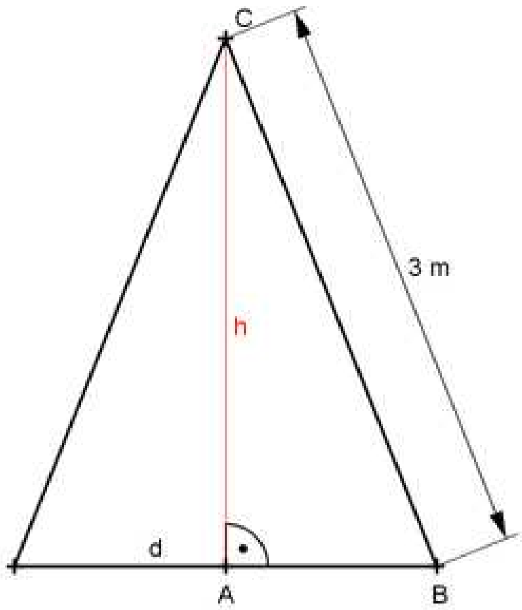
Extrem Aufgabe 115

Welche Höhe h hat eine quadratische Pyramide mit einer Seitenlänge von 3 m, wenn ihr Volumen V maximal sein soll?



Zielfunktion:

d = Diagonale der Grundfläche

a = Grundseite

$$V = \frac{a^2 * h}{3}$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras für die Hälfte der Grundfläche:

$d^2 = a^2 + a^2$

$d^2 = 2a^2$

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$$3^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

$$9 = \frac{d^2}{4} + h^2$$

$$9 = \frac{2a^2}{4} + h^2 \mid \cdot 2$$

$$18 = a^2 + 2h^2 \mid -2h^2$$

$$a^2 = 18 - 2h^2$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(h)} = \frac{(18 - 2h^2) \cdot h}{3} = \frac{18h - 2h^3}{3} = 6h - \frac{2}{3} \cdot h^3 \qquad 0 < h < 3 \text{ m}$$

$$V'_{(h)} = 6 - 2h^2$$

$$6 - 2h^2 = 0 \mid +2h^2$$

$$2h^2 = 6 \mid :2$$

$$h^2 = 3 \mid \sqrt{\ }$$

$h = \sqrt{3}$ m

$$a^2 = 18 - 2 \cdot 3 = 12 \mid \sqrt{\ }$$

$$a = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

$$V''_{(h)} = -4h < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$V_{(\sqrt{3})} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{3} \text{ m}^3 = 4 \cdot \sqrt{3} \text{ m}^3$$ absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = \frac{18 \cdot 0 - 2 \cdot 0^3}{3} = 0 \text{ m}^3 < 4 \cdot \sqrt{3} \text{ m}^3$$

$$V_{(3)} = \frac{18 \cdot 3 - 2 \cdot 3^3}{3} = 0 \text{ m}^3 < 4 \cdot \sqrt{3} \text{ m}^3$$