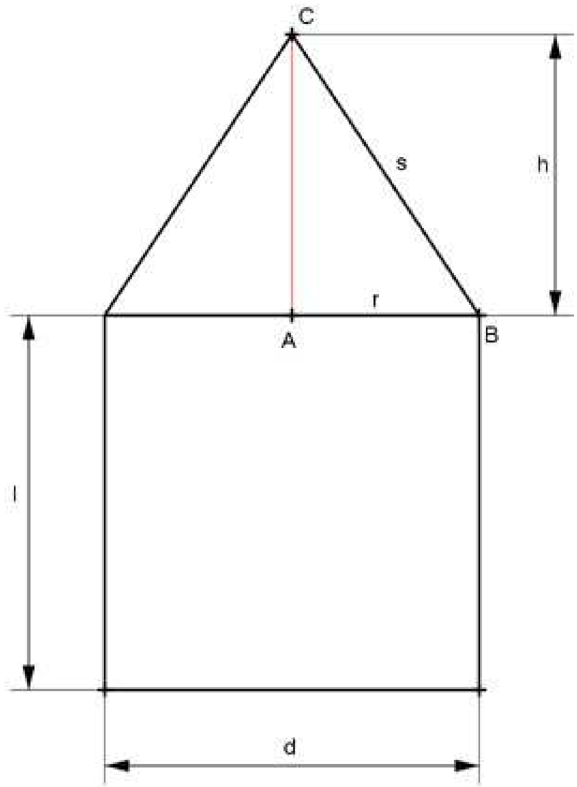
Extrem Aufgabe 117

Welche Höhe h hat ein Kegel, der auf einen Zylinder mit gleichem Grundkreisradius r aufgesetzt ist, wenn die Höhe h = 2/3 d und das Gesamtvolumen V = 6π betragen und die Gesamtoberfläche O minimal sein soll?



Zielfunktion:

$$O = \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r \cdot s$$

Nebenbedingung:

$$h = \frac{2}{3} \cdot d = \frac{2}{3} \cdot 2r = \frac{4}{3} \cdot r$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot l + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$6 \cdot \pi = \pi \cdot r^2 \cdot l + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 4/3\, r}{3} \quad | :\pi$$

$$6 = r^2 \cdot l + \frac{4 \cdot r^3}{9} \quad | \cdot 9$$

$$54 = 9 \cdot r^2 \cdot l + 4 \cdot r^3 \quad |:r^2$$

$$\frac{54}{r^2} = 9l + 4r \quad | -4r$$

$$\frac{54}{r^2} - 4r = 9l \quad | :9$$

$$l = \frac{54 - 4r^3}{9r^2}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$$s^2 = r^2 + h^2$$

$$s^2 = r^2 + \left(\frac{4}{3} r\right)^2$$

$$s^2 = r^2 + \frac{16}{9} r^2 = \frac{25}{9} r^2 \quad |\surd$$

$$s = \frac{5}{3} r$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$O_{(r)} = \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{54 - 4r^3}{9r^2} + \pi \cdot r \cdot \frac{5}{3} r$$

$$O_{(r)} = \frac{\pi}{9} \cdot \left(9r^2 + \frac{108 - 8r^3}{r} + 15r^2\right)$$

$$O_{(r)} = \frac{\pi}{9} \cdot \left(24r^2 + \frac{108 - 8r^3}{r}\right)$$

$$O_{(r)} = \frac{\pi}{9} \cdot \left(\frac{108 + 16r^3}{r}\right)$$

$$O_{(r)} = \frac{\pi}{9} * (108 * r^{-1} + 16r^2) \qquad 0 < r < \infty$$

Zu untersuchende Funktion:

$$O_{(r)} = 108 * r^{-1} + 16r^2$$

$$O'_{(r)} = - \frac{108}{r^2} + 32r$$

$$- \frac{108}{r^2} + 32r = 0 \mid *r^2$$

$$32r^3 - 108 = 0 \mid *108$$

$$32r^3 = 108 \mid :32$$

$$r^3 = 3{,}375 \mid \sqrt[3]{}$$

$$r = 1{,}5 \text{ LE}$$

$$\mathbf{h =} \frac{4}{3} * 1{,}5 = \mathbf{2\ LE}$$

$$l = \frac{54 - 4 * 1{,}5^3}{9 * 1{,}5^2} = 2 \text{ LE}$$

$$s = \frac{5}{3} * 1{,}5 = 2{,}5 \text{ LE}$$

$$O''_{(r)} = -(-2) * \frac{108}{r^3} + 32 > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$O_{(1,5)} = \frac{\pi}{9} * \left(\frac{108}{1{,}5} + 16 * 1{,}5^2\right) = 37{,}7 \text{ FE absolutes Minimum, weil}$$

$$O_{(0)} = \frac{\pi}{9} * \left(\frac{108}{0} + 16 * 0^2\right) = \infty > 37{,}7 \text{ FE}$$

$$O_{(\infty)} = \frac{\pi}{9} * \left(\frac{108}{\infty} + 16 * \infty^2\right) = \infty > 37{,}7 \text{ FE}$$