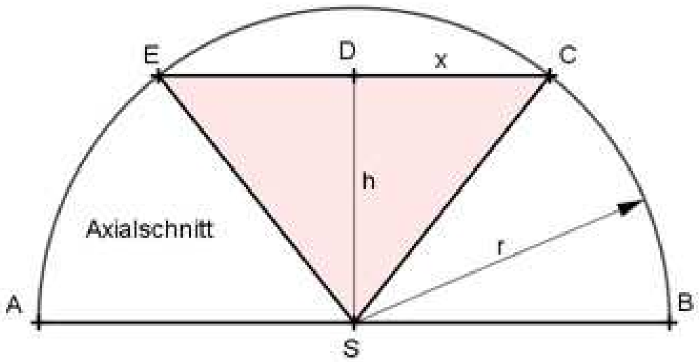
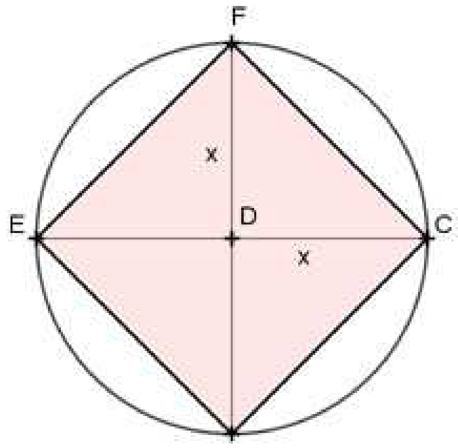
Extrem Aufgabe 121

Wie groß ist die Höhe h der in die Halbkugel mit dem Radius r einbeschriebenen quadratischen Pyramide, wenn deren Volumen V maximal sein soll?





Draufsicht auf die Grundfläche

Zielfunktion:

$$V = \frac{FC^2 * h}{3}$$

Nebenbedingung:

$EF = FC$

Satz von Pythagoras im Dreieck DCF:

$FC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \quad |\sqrt{}$

$FC = x * \sqrt{2}$

Satz von Pythagoras im Dreieck SCD:

$r^2 = h^2 + x^2 \quad |-x^2$

$r^2 - x^2 = h^2 \quad |\sqrt{}$

$h = \sqrt{r^2 - x^2}$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(x)} = \frac{2 * x^2 * \sqrt{r^2 - x^2}}{3} \qquad 0 < x < r$$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(x)} = x^2 * \sqrt{r^2 - x^2}$

Produktregel:

$u' = 2x$

$$v' = \frac{1}{2} * \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$V'_{(x)} = 2x * \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{-x * x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$V'_{(x)} = \frac{2x * (r^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2xr^2 - 3x^3}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\frac{2xr^2 - 3x^3}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \quad | *\sqrt{r^2 - x^2}$$

$x * (2r^2 - 3x^2) = 0$

$x_1 = 0$ keine Lösung

$2r^2 - 3x^2 = 0 \quad |+3x^2$

$3x^2 = 2r^2 \quad |:3$

$$x^2 = \frac{2}{3} * r^2 \quad |\surd$$

$$x = \frac{r}{3} * \surd 6$$

$$\mathbf{h =} \sqrt{r^2 - \frac{2}{3} r^2} = \mathbf{(r/3) * \surd 3}$$

$$FC = 2 * \frac{r}{3} * \surd 3$$

Zur Beurteilung, ob $V''_{(x)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$$u' = 2r^2 - 9x^2$$

$$V''_{(x)} = \frac{2r^2 - 9x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$V''_{((r/3)*\surd 3)} = \frac{2r^2 - 9 * (2/3) * r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-4r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$V_{(r/3)*\surd 3} = \frac{(2/3) * r^2 * 2 * (r/3) * \surd 3}{3} = \frac{4 * \surd 3 * r^3}{27}$$

absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = \frac{2 * 0^2 * \sqrt{r^2 - 0^2}}{3} = 0 < \frac{4 * \surd 3 * r^3}{3}$$

$$V_{(r)} = \frac{2 * r^2 * \sqrt{r^2 - r^2}}{3} = 0 < \frac{4 * \surd 3 * r^3}{3}$$