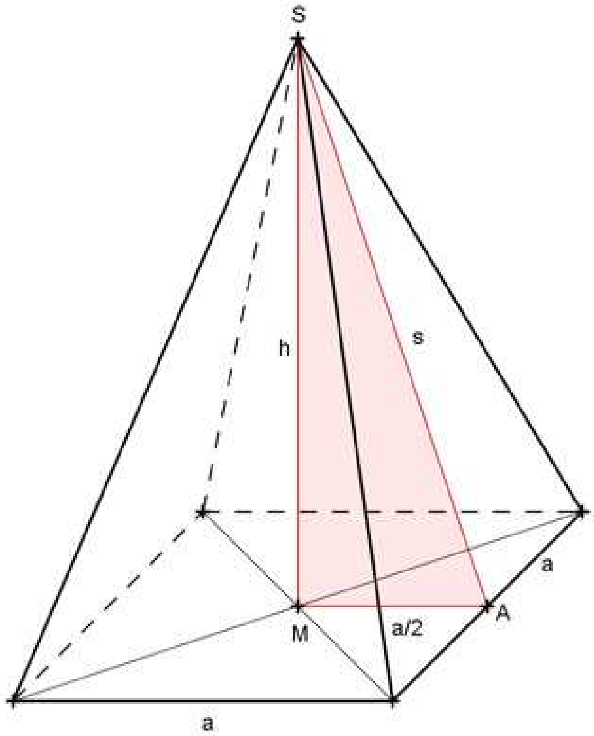
Extrem Aufgabe 125

Wie groß ist die Höhe h einer quadratischen Pyramide, wenn bei gegebenem Volumen V ihre Oberfläche O minimal sein soll?



Zielfunktion:

$O = a^2 + 2 * a * s$

Nebenbedingung

$$V = \frac{a^2 * h}{3}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck MAS:

$s^2 = (a/2)^2 + h^2 \mid \surd$

$$s^2 = \frac{a^2}{4} + h^2 \mid -h^2$$

$$\frac{a^2}{4} = s^2 - h^2 \mid *4$$

$a^2 = 4 * (s^2 - h^2) \mid \surd$

$a = 2 * \sqrt{s^2 - h^2}$

$$V = \frac{4 * (s^2 - h^2) * h}{3} \quad | * \frac{3}{4 * h}$$

$$s^2 - h^2 = \frac{3 * V}{4 * h} \quad | +h^2$$

$$s^2 = \frac{3 * V}{4 * h} + h^2 \quad |\sqrt{}$$

$$s = \sqrt{\frac{3*V}{4*h} + h^2}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$O = 4 * (s^2 - h^2) + 2 * \sqrt{s^2 - h^2} * \sqrt{\frac{3*V}{4*h} + h^2}$$

$$O_{(h)} = 4 * \left(\frac{3 * V}{4 * h} + h^2 - h^2\right) + 2 * 2 * \left(\sqrt{\frac{3*V}{4*h} + h^2 - h^2} * \sqrt{\frac{3*V}{4*h} + h^2}\right)$$

$$O_{(h)} = \frac{3 * V}{h} + 4 * \sqrt{\frac{3V}{4h} * \left(\frac{3V}{4h} + h^2\right)}$$

$$O_{(h)} = \frac{3V}{h} + 4 * \sqrt{\frac{3V*(3V+4h^2)}{(4h)^2}}$$

$$O_{(h)} = \frac{3V}{h} + \frac{1}{h} * \sqrt{9V^2+12Vh^3} \qquad 0 < h < \infty$$

Ketten- und Quotientenregel für $\frac{1}{h} * \sqrt{9V^2+12Vh^3}$:

$v' = 1$

$$u' = \frac{1}{2} * \frac{36Vh^2}{\sqrt{9V^2+12Vh^3}}$$

$$O'_{(h)} = -\frac{3V}{h^2} + \frac{\frac{18Vh^2 * h}{\sqrt{9V^2+12Vh^3}} - 1 * \sqrt{9V^2+12Vh^3}}{h^2}$$

$$O'_{(h)} = -\frac{3V}{h^2} + \frac{18Vh^3 - (9V^2 + 12\,Vh^3)}{h^2 * \sqrt{9V^2+12Vh^3}}$$

$$O'_{(h)} = \frac{-3V * (\sqrt{9V^2+12Vh^3}) + 6Vh^3 - 9V^2}{h^2 * \sqrt{9V^2+12Vh^3}}$$

$$\frac{-3V * (\sqrt{9V^2+12Vh^3}) + 6Vh^3 - 9V^2}{h^2 * \sqrt{9V^2+12Vh^3}} = 0 \;|{*h^2} * \sqrt{9V^2+12Vh^3}$$

$$-3V * (\sqrt{9V^2+12Vh^3}) + 6Vh^3 - 9V^2 = 0 \,|:(-3V)$$

$$\sqrt{9V^2+12Vh^3} - 2h^3 + 3V = 0 \;|+2h^3 - 3V$$

$$\sqrt{9V^2+12Vh^3} = 2h^3 - 3V \;|^2$$

$$9V^2 + 12Vh^3 = 4h^6 - 12Vh^3 + 9V^2 \;|-9V^2$$

$$12Vh^3 = 4h^6 - 12Vh^3 \;|+12Vh^3$$

$$4h^6 - 24Vh^3 = 0 \;|:4h^3$$

$$h^3 - 6V = 0 \;|+24V$$

$$h^3 = 6V \;|\sqrt[3]{}$$

$$\mathbf{h = \sqrt[3]{6*V}}$$

Zur Beurteilung, ob $O''_{(h)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$$u' = -3V * \frac{1}{2} * \frac{36Vh^2}{\sqrt{9V^2+12Vh^3}} + 18Vh^2$$

$$u'(\sqrt[3]{6*V}) = \frac{-54V^2h^2}{\sqrt{9V^2+12V*6V}} + 18Vh^2$$

$$u'(\sqrt[3]{6*V}) = -6Vh^2 + 8Vh^2 = 2Vh^2$$

$$O''(\sqrt[3]{6*V}) = \frac{2Vh^2}{h^2 * 9V} > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$O(\sqrt[3]{6*V}) = \frac{3V}{h} + \frac{9V}{h} = \frac{12V}{\sqrt[3]{6*V}}$$ absolutes Minimum, weil

$$O(0) = \frac{3V}{0} + \frac{\sqrt{9V^2+12V*0^3}}{0} \text{ --> } \infty > \frac{12V}{\sqrt[3]{6*V}}$$

$$O(\infty) = \frac{3V}{\infty} + \frac{\sqrt{9V^2+12V*\infty^3}}{\infty} \text{ --> } \infty > \frac{12V}{\sqrt[3]{6*V}}$$