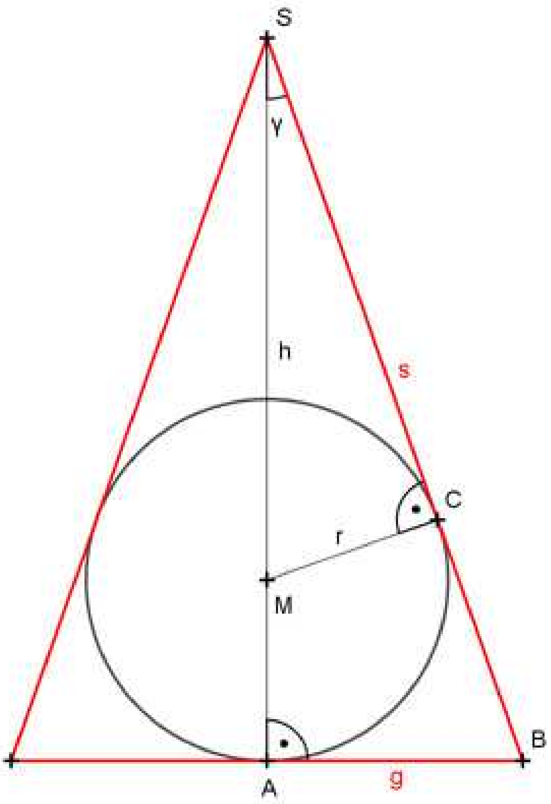
Extrem Aufgabe 127

Wie groß ist der Grundkreisradius g eines Kegels, der einer Kugel mit dem Radius r umschrieben ist und dessen Oberfläche O minimal sein soll?



Zielfunktion:

$O = \pi * g^2 + \pi * g * s$

Nebenbedingung:

Die Dreiecke ABS und SMC sind ähnlich, weil sie in allen Winkeln übereinstimmen.

AS = h

MS = h - r

BS = s

Es gilt:

$$\frac{s}{g} = \frac{h - r}{r} \quad |*g$$

$$s = \frac{g * (h - r)}{r} \quad |^2$$

$$s^2 = \frac{g^2 * (h^2 - 2rh + r^2)}{r^2}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck ABS:

$$s^2 = h^2 + g^2$$

$$\frac{g^2 * (h - r)^2}{r^2} = h^2 + g^2 \quad |*r^2$$

$$g^2 * (h - r)^2 = h^2r^2 + g^2r^2 \quad | -h^2r^2$$

$$g^2h^2 - 2rg^2h + g^2r^2 = h^2r^2 + g^2r^2 \quad | -g^2r^2$$

$$g^2h^2 - 2rg^2h = h^2r^2 |:h$$

$$g^2h + 2rg^2 = hr^2 \quad |-hr^2 + 2rg^2$$

$$g^2h - hr^2 = 2rg^2$$

$$h * (g^2 - r^2) = 2rg^2 \quad | :(g^2 - r^2)$$

$$h = \frac{2rg^2}{g^2 - r^2}$$

$$h^2 = \frac{4r^2g^4}{(g^2 - r^2)^2}$$

$$s^2 = \frac{4r^2g^4}{(g^2 - r^2)^2} + g^2$$

$$s^2 = \frac{4r^2g^4 + g^6 - 2r^2g^4 + g^2r^4}{(g^2 - r^2)^2} = \frac{g^2 * (g^4 + 2r^2g^2 + r^4)}{(g^2 - r^2)^2}$$

$$s^2 = \frac{g^2 * (g^2 + r^2)^2}{(g^2 - r^2)^2} \quad |\sqrt{\ }$$

$$s = \frac{g * (g^2 + r^2)}{g^2 - r^2} = \frac{g^3 + gr^2}{g^2 - r^2}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$O_{(g)} = \pi * g^2 + \pi * g * \frac{g^3 + gr^2}{g^2 - r^2}$$

$$O_{(g)} = \pi * \left(g^2 + \frac{g^4 + g^2r^2}{g^2 - r^2}\right) = \pi * \left(\frac{2g^4}{g^2 - r^2}\right)$$

Zu untersuchende Funktion:

$$O_{(g)} = \frac{g^4}{g^2 - r^2} \qquad r < g < \infty$$

Quotientenregel:

$u' = 4g^3$

$v' = 2g$

$$O'_{(g)} = 2g + \frac{4g^3 * (g^2 - r^2) - 2g * g^4}{(g^2 - r^2)^2}$$

$$O'_{(g)} = \frac{2g^5 - 4g^3r^2}{(g^2 - r^2)^2}$$

$$\frac{2g^5 - 4g^3r^2}{(g^2 - r^2)^2} = 0 \mid *(g^2 - r^2)^2$$

$2g^5 - 4g^3r^2 = 0 \mid :2g^3$

$g^2 - 2r^2 = 0 \mid +2r^2$

$g^2 = 2r^2 \mid \sqrt{\ }$

$g = r * \sqrt{2}$

$$s = \frac{2r^3 \cdot \sqrt{2} + r^3 \cdot \sqrt{2}}{2r^2 - r^2} = \frac{3r^3 \cdot \sqrt{2}}{r^2} = 3r \cdot \sqrt{2}$$

Zur Beurteilung, ob $O''_{(g)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u' = 10g^4 - 12g^2r^2$

$$O''_{(r \cdot \sqrt{2})} = \frac{10 \cdot (r \cdot \sqrt{2})^4 - 12 \cdot r^2 \cdot (r \cdot \sqrt{2})^2}{2r^2 - r^2}$$

$$O''_{(r \cdot \sqrt{2})} = \frac{40r^4 - 24r^4}{r^2} = 16r^2 > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$O_{(r \cdot \sqrt{2})} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot r \cdot \sqrt{2} = 8\pi r^2$$

absolutes Minimum, weil

$$O_{(r)} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \frac{r^3 + r^3}{r^2 - r^2} \text{ --> } \infty > 8\pi r^2$$

$$O_{(\infty)} = \pi \cdot \infty^2 + \pi \cdot \infty \cdot \frac{\infty^3 + \infty r^2}{\infty^2 - r^2} \text{ --> } \infty > 8\pi r^2$$