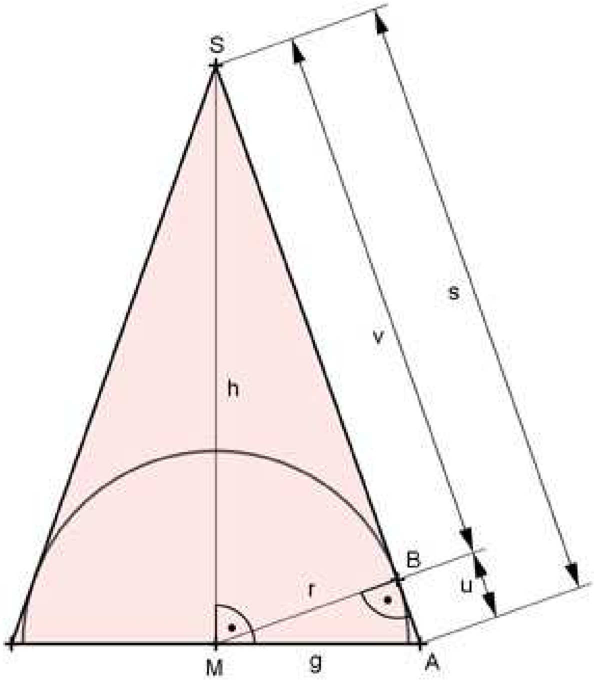
Extrem Aufgabe 129

Wie groß ist die Höhe h eines Kegels, der einer Halbkugel mit dem Radius r umschrieben ist und dessen Volumen V minimal sein soll?



Zielfunktion:

$$V = \frac{\pi * g^2 * h}{3}$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck MAS:

$s^2 = g^2 + h^2 \mid -h^2$

$g^2 = s^2 - h^2$

Kathetensatz im Dreieck MAS:

$h^2 = s * v \mid^2$

$h^4 = s^2 * v^2 \mid :v^2$

$$s^2 = \frac{h^4}{v^2}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck MBS:

$h^2 = v^2 + r^2 \mid -r^2$

$v^2 = h^2 - r^2$

$$s^2 = \frac{h^4}{h^2 - r^2}$$

$$g^2 = \frac{h^4}{h^2 - r^2} - h^2 = \frac{h^4 - h^4 + h^2r^2}{h^2 - r^2} = \frac{h^2r^2}{h^2 - r^2}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(h)} = \frac{\pi * h^2r^2 * h}{3 * (h^2 - r^2)}$$

Zu untersuchende Funktion:

$$V_{(h)} = \frac{h^3r^2}{h^2 - r^2} \qquad r < h < \infty$$

Quotientenregel:

$u' = 3h^2r^2$

$v' = 2h$

$$V'_{(h)} = \frac{3h^2r^2 * (h^2 - r^2) - 2h * h^3r^2}{(h^2 - r^2)^2}$$

$$V'_{(h)} = \frac{3h^4r^2 - 3h^2r^4 - 2h^4r^2}{(h^2 - r^2)^2} = \frac{h^4r^2 - 3h^2r^4}{(h^2 - r^2)^2}$$

$$\frac{h^4r^2 - 3h^2r^4}{(h^2 - r^2)^2} = 0 \mid *(h^2 - r^2)^2$$

$h^4r^2 - 3h^2r^4 = 0 \mid :h^2r^2$

$h^2 - 3r^2 = 0 \mid +3r^2$

$h^2 = 3r^2 \; |\sqrt{}$

$h = r * \sqrt{3}$

$$g^2 = \frac{3r^2 * r^2}{3r^2 - r^2} = \frac{3r^4}{2r^2} = \frac{3}{2} * r^2$$

Zur Beurteilung, ob $V''_{(h)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u' = 4h^3r^2 - 6hr^4$

$$V''_{(h)} = \frac{4h^3r^2 - 6hr^4}{(h^2 - r^2)^2}$$

$$V''_{(r * \sqrt{3})} = \frac{4 * 3r^2 * r * \sqrt{3} * r^2 - 6 * r * \sqrt{3} * r^4}{2r^2}$$

$$V''_{(r * \sqrt{3})} = \frac{12 * \sqrt{3} * r^5 - 6 * \sqrt{3} * r^5}{2r^2} > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$V_{(r*\sqrt{3})} = \frac{\pi * 3 * r^2 * r * \sqrt{3}}{2 * 3} = \frac{\pi * \sqrt{3} * r^3}{2} \quad \text{absolutes Minmum, weil}$$

$$V_{(r)} = \frac{r^3 * r^2}{r^2 - r^2} \text{ --> } \infty > \frac{\pi * \sqrt{3} * r^3}{2}$$

$$V_{(\infty)} = \frac{\infty^3 * r^2}{\infty^2 - r^2} \text{ --> } \infty > \frac{\pi * \sqrt{3} * r^3}{2}$$