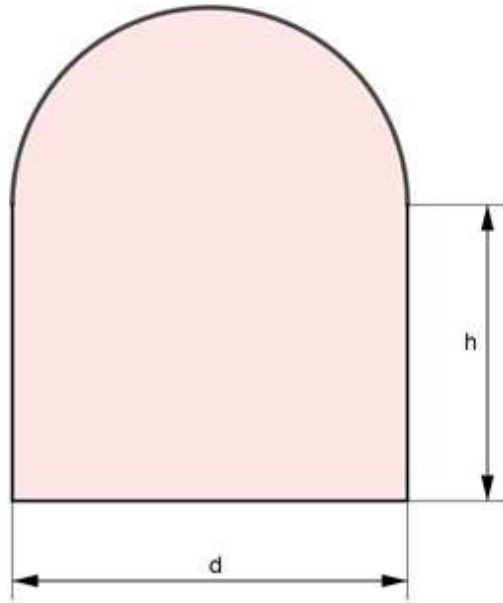


Extrem Aufgabe 13

Ein Fenster hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Wie groß muss der Durchmesser d des Halbkreises sein, damit bei gegebenem Fensterumfang U die Fläche A am größten wird?



Zielfunktion:

$$A = d * h + \frac{d^2 * \pi}{8} \quad 0 < d < \infty$$

Nebenbedingung:

$$U = d + 2 * h + \frac{d * \pi}{2} \quad | -d$$

$$U - d = 2 * h + \frac{d * \pi}{2} \quad | - \frac{d * \pi}{2}$$

$$U - d - \frac{d * \pi}{2} = 2 * h \quad | :2$$

$$h = \frac{U - d - \frac{d * \pi}{2}}{2}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A_{(d)} = d * \left(\frac{U}{2} - \frac{d}{2} - \frac{d * \pi}{4} \right) + \frac{d^2 * \pi}{8}$$

$$A_{(d)} = d * \frac{U}{2} - \frac{d^2}{2} - \frac{d^2 * \pi}{4} + \frac{d^2 * \pi}{8}$$

$$A_{(d)} = d * \frac{U}{2} - \frac{d^2}{2} - \frac{d^2 * \pi}{8}$$

$$A'_{(d)} = \frac{U}{2} - d - \frac{d * \pi}{4}$$

$$\frac{U}{2} - d - \frac{d * \pi}{4} = 0$$

$$\frac{U}{2} - d - 0,785d = 0$$

$$\frac{U}{2} - 1,785d = 0 \quad | +1,785d$$

$$1,785d = \frac{U}{2} \quad | :1,785$$

$$d = \frac{U}{3,57} = 0,28 * U$$

$$h = \frac{U}{2} - \frac{U}{2 * 3,57} - \frac{U * \pi}{4 * 3,57}$$

$$h = 0,5 * U - 0,14 * U - 0,22 * U = 0,14 * U$$

$$A''_{(d)} = -1 - \frac{\pi}{4} < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

$$A_{(0,28U)} = 0,28 * U * 0,14 * U + \frac{(0,28 * U)^2 * \pi}{8}$$

$A_{(0,28U)} = 0,07 * U^2$ absolutes Maximum, weil

$$A_{(0)} = 0 * \frac{U}{2} - \frac{0^2}{2} - \frac{0^2 * \pi}{8} = 0 < 0,07 * U^2$$

$$A_{(\infty)} = \infty * \frac{U}{2} - \frac{\infty^2}{2} - \frac{\infty^2 * \pi}{8} = < 0 < 0,07 * U^2$$