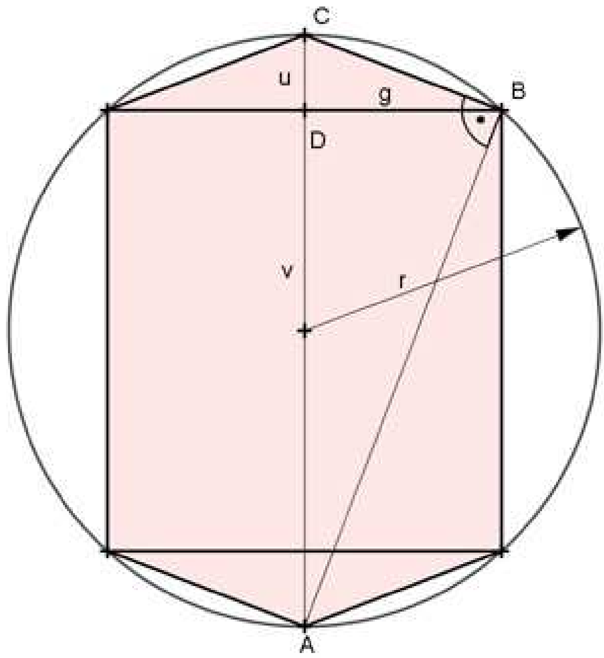
Extrem Aufgabe 131

Wie groß ist der Radius g des in die Kugel mit dem Radius r einbeschriebenen Zylinders mit aufgesetzten Kegeln, wenn deren Gesamtvolumen V maximal sein soll?



Zielfunktion:

$$V = \pi * g^2 * 2 * (r - u) + \frac{2 * \pi * g^2 * u}{3}$$

Nebenbedingung:

Höhensatz im Dreieck ABC:

$g^2 = u * v = u * (2r - u)$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(u)} = \pi * u * 2 * (2r - u) * (r - u) + \frac{2 * \pi * u * (2r - u) * u}{3}$$

$$V_{(u)} = \pi * u * (4r^2 - 6ru + 2u^2) + \frac{2 * \pi * (2ru^2 - u^3)}{3}$$

$$V_{(u)} = \frac{\pi * (12r^2u - 18ru^2 + 6u^3 + 4ru^2 - 2u^3)}{3}$$

$$V_{(u)} = \frac{\pi}{3} * (12r^2u - 14ru^2 + 4u^3) \qquad 0 < u < r$$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(u)} = 12r^2u - 14ru^2 + 4u^3$

$V'_{(u)} = 12r^2 - 28ru + 12u^2$

$12u^2 - 28ru + 12r^2 = 0$

A, B, C - Formel

$A = 12$; $B = -28r$; $C = 12r^2$

$$u_{1,2} = \frac{-(-28r) \pm \sqrt{(-28r)^2 - 4*12*12r^2}}{2 * 12}$$

$$u_{1,2} = \frac{28r \pm 14,4r}{24}$$

$u_1 = 1,77r$ keine Lösung > r

$u_2 = 0,567r$

$g^2 = 0,567r * (2r - 0,567r) = 0,81r^2$ gerundet $|\sqrt{}$

$g = 0,9r$

$V''_{(u)} = -28r + 24u$

$V''_{(0,567r)} = -28r + 14 * 0,567r < 0$ --> Maximum

$$V_{(0,567r)} = \pi * (0,9r)^2 * 2 * (r - 0,567r) + \frac{2 * \pi * (0,9r)^2 * 0,567r}{3}$$

$V_{(0,567r)} = 2,2r^3 + 0,96r^3 = 3,16r^3$ gerundet, absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = \frac{\pi}{3} * (12r^2 * 0 - 14r * 0^2 + 4 * 0^3) = 0 < 3,16r^3$$

$$V_{(r)} = \frac{\pi}{3} * (12r^2 * r - 14r * r^2 + 4 * r^3) = 2,09r^3 < 3,16r^3$$