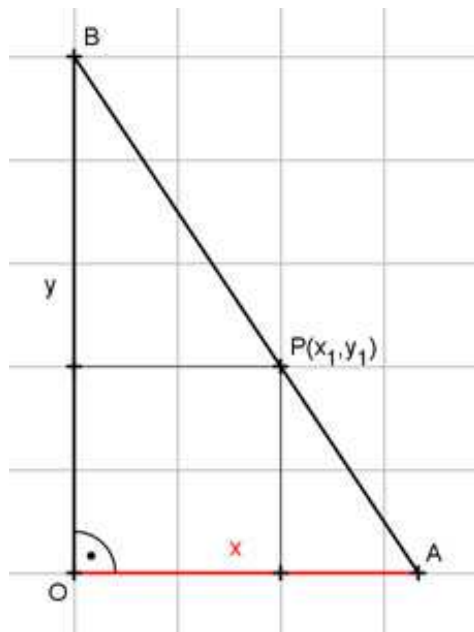


Extrem Aufgabe 133

Wie groß ist OA, damit die Gerade durch den gegebenen Punkt P ein Dreieck OAB mit minimalem Flächeninhalt A ausschneidet?



Zielfunktion:

$$OA = x$$

$$OB = y$$

$$A = \frac{x * y}{2}$$

Nebenbedingung:

Strahlensatz:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y - y_1}$$

Über Kreuz multipliziert:

$$x * (y - y_1) = y * x_1$$

$$xy - x * y_1 = y * x_1 \quad | -y * x_1 + x * y_1$$

$$xy - yx_1 = xy_1$$

$$y * (x - x_1) = xy_1 \quad | : (x - x_1)$$

$$y = \frac{xy_1}{x - x_1}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A(x) = \frac{x * xy_1}{2 * (x - x_1)}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} * \frac{x^2 y_1}{x - x_1} \quad x_1 < x < \infty$$

Zu untersuchende Funktion:

$$A(x) = \frac{x^2 y_1}{x - x_1}$$

Quotientenregel:

$$u' = 2xy_1$$

$$v' = 1$$

$$A'(x) = \frac{2xy_1 * (x - x_1) - 1 * x^2 y_1}{(x - x_1)^2} = \frac{x^2 y_1 - 2xx_1 y_1}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{x^2 y_1 - 2xx_1 y_1}{(x - x_1)^2} = 0 \quad | * (x - x_1)^2$$

$$x^2 y_1 - 2xx_1 y_1 = 0 \quad | :xy_1$$

$$x - 2x_1 = 0 \quad | +2x_1$$

$$x = 2x_1$$

$$y = \frac{2x_1 * y_1}{2x_1 - x_1} = 2y_1$$

Zur Beurteilung, ob $A''(x) >$ oder < 0 : (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$$u = x^2 y_1 - 2x x_1 y_1, u' = 2xy_1 - 2x_1 y_1$$

$$A''(x) = \frac{2xy_1 - 2x_1 y_1}{(x - x_1)^2} = \frac{2y_1 * (x - x_1)}{(x - x_1)^2} = \frac{2y_1}{x - x_1} > 0 \rightarrow \text{Minimum}$$

$$A_{(2x_1)} = \frac{1}{2} * 2x_1 * 2y_1 = 2x_1 y_1 \text{ absolutes Minimum, weil}$$

$$A_{(x_1)} = \frac{1}{2} * \frac{x_1^2 * y_1}{x_1 - x_1} \rightarrow \infty > 2x_1 y_1$$

$$A_{(\infty)} = \frac{1}{2} * \frac{\infty^2 * y_1}{\infty - x_1} \rightarrow \infty > 2x_1 y_1$$