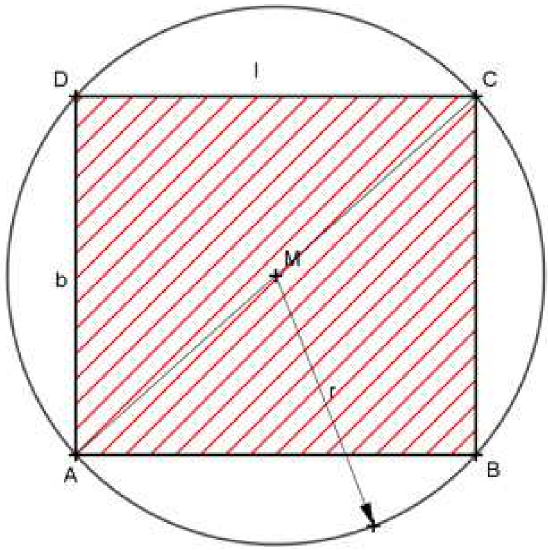
Extrem Aufgabe 134

Welche Breite b hat ein rechteckiger Balken, der aus einem Baumstamm mit dem Durchmesser d geschnitten wird und dessen Widerstandsmoment $W = (1/\sigma) * lb^2$ maximal sein soll?



Zielfunktion:

$$W = \frac{1}{\sigma} * lb^2$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ACD:

$AC = d$

$AC^2 = d^2 = l^2 + b^2 \mid -l^2$

$b^2 = d^2 - l^2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$W_{(l)} = \frac{1}{\sigma} * l * (d^2 - l^2) \qquad 0 < l < d$$

Zu untersuchende Funktion:

$W_{(l)} = l * (d^2 - l^2) = ld^2 - l^3$

$W'_{(l)} = d^2 - 3l^2$

$d^2 - 3l^2 = 0 \quad |+3l^2$

$3l^2 = d^2 \quad |:3$

$$l^2 = \frac{d^2}{3} \quad |\sqrt{}$$

$$l = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d * \sqrt{3}}{3}$$

$$b^2 = d^2 - \frac{3d^2}{9} = \frac{2}{3} d^2 \quad |\sqrt{}$$

$$\mathbf{b =} d * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{d}{3} * \sqrt{6}}$$

$W''_{(l)} = -6l < 0 \text{ --> Maximum}$

$$W_{((d/3) * \sqrt{3})} = \frac{1}{\sigma} * \frac{d * \sqrt{3}}{3} * \left(\frac{d * \sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{1}{\sigma} * \frac{2}{9} * \sqrt{3} * d^3$$

absolutes Maximum, weil

$$W_{(0)} = \frac{1}{\sigma} * (0 * d^2 - 0^3) = 0 < \frac{1}{\sigma} * \frac{2}{9} * \sqrt{3} * d^3$$

$$W_{(d)} = \frac{1}{\sigma} * (d * d^2 - d^3) = 0 < \frac{1}{\sigma} * \frac{2}{9} * \sqrt{3} * d^3$$