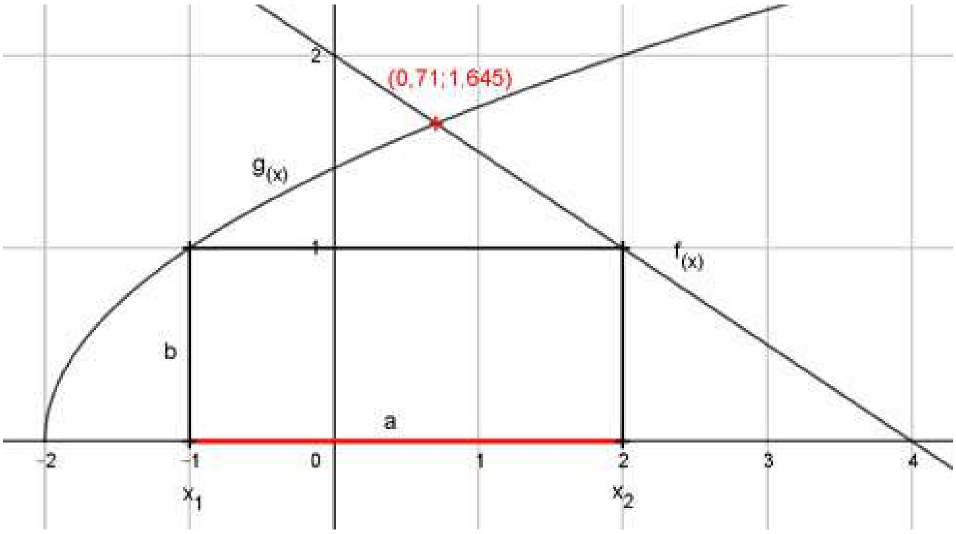
Extrem Aufgabe 144

Wie groß ist die Seite a des Rechtecks, wenn es von den Funktionen $f_{(x)} = 2 - x/2$ und $g_{(x)} = \sqrt{x+2}$ begrenzt wird und sein Umfang U maximal sein soll?



Zielfunktion:

$U = 2a + 2b$

Nebenbedingung:

$a = x_2 - x_1$

$g_{(x1)} = f_{(x2)} = b$

$$\sqrt{x_1+2} = 2 - \frac{x_2}{2} = b \quad |*2$$

$$2 * \sqrt{x_1+2} = 4 - x_2 \quad |^2$$

$$4 * (x_1 + 2) = 16 - 8x_2 + x_2^2$$

$$4x_1 + 8 = 16 - 8x_2 + x_2^2 \quad |-8$$

$$4x_1 = 8 - 8x_2 + x_2^2 \quad |:4$$

$$a = x_2 - \frac{8 - 8x_2 + x_2^2}{4}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$U_{(x2)} = 2 * \left(x_2 - \frac{8 - 8x_2 + x_2^2}{4}\right) + 2 * \left(2 - \frac{x_2}{2}\right)$$

$$U_{(x2)} = \frac{4x_2 - 8 + 8x_2 - x_2^2}{2} + 4 - x_2$$

$$U_{(x2)} = \frac{12x_2 - 8 - x_2^2 + 8 - 2x_2}{2}$$

Nullstelle von $f_{(x)}$:

$$2 - \frac{x}{2} = 0 \mid *2$$

$$4 - x = 0 \mid +x$$

$$x = 4$$

Nullstelle von $g_{(x)}$:

$$\sqrt{x+2} = 0 \mid ^2$$

$$x + 2 = 0 \mid -2$$

$$x = - 2$$

Schnittpunkt von $f_{(x)}$ und $g_{(x)}$:

$$2 - \frac{x}{2} = \sqrt{x+2} \mid ^2$$

$$4 - 2x + \frac{x^2}{4} = x + 2 \mid *4$$

$$16 - 8x + x^2 = 4x + 8 \mid -4x - 8$$

$$x^2 - 12x + 8 = 0 \qquad\qquad - 2 < x < 4$$

p, q - Formel:

$p = - 12$, $q = 8$

$$x_{1,2} = -\frac{-12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-12}{2}\right)^2 - 8}$$

$x_{1,2} = 6 \pm 5{,}29$

$x_1 = 11{,}29$ keine Lösung

$x_2 = 0{,}71$

$$U_{(x2)} = \frac{-x_2^2 + 10x_2}{2} \qquad -0{,}71 < x_2 < 4$$

Zu untersuchende Funktion:

$U_{(x2)} = -x_2^2 + 10x_2$

$U'_{(x2)} = -2x_2 + 10$

$-2x_2 + 10 = 0 \mid +2x_2$

$2x_2 = 10 \mid :2$

$x_2 = 5$ **keine Lösung**, liegt außerhalb des Definitonsbereiches

$U_{(0,71)}$ --> $f_{(x1)} = f_{(x2)} = b$ und $x_1 = x_2$ --> $a = 0$ -->

es entsteht kein Rechteck mit maximalem Umfang im angegebenen Definitionsbereich

$U_{(4)}$ --> Wegen $f_{(x2)} = 0$ gilt auch $f_{(x1)} = 0 = b$ und $a = 6$ -->

es entsteht kein Rechteck mit maximalem Umfang im angegebenen Definitionsbereich.