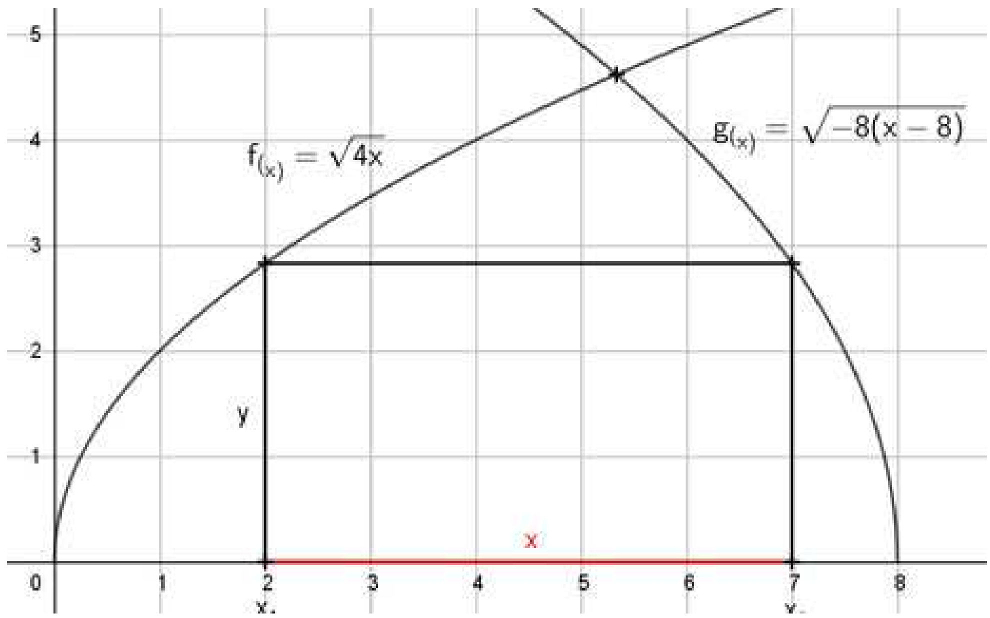
Extrem Aufgabe 152

Wie groß ist x, wenn der Flächeninhalt A des Rechtecks, das durch $f_{(x)}$ und $g_{(x)}$ begrenzt wird, maximal sein soll?



Zielfunktion:

$A = x * y$

Nebenbedingung:

$x = x_2 - x_1$

$y = f_{(x1)} = g_{(x2)}$

$\sqrt{4*x_1} = \sqrt{(-8*(x_2 - 8)}$ $|^2$

$4x_1 = - 8(x_2 - 8)$ $|:4$

$x_1 = - 2x_2 + 16$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$A_{(x2)} = (x_2 - (-2x_2 + 16) * \sqrt{(-8*(x_2 - 8)}$

$A_{(x2)} = (3x_2 - 16) * \sqrt{(-8*(x_2 - 8)}$

$A^2_{(x2)} = (9x_2^2 - 96x_2 + 256) * (- 8x_2 + 64)$

$A^2_{(x2)} = - 72x_2^3 + 768x_2^2 - 2\,048x_2 + 576x_2^2 - 6\,144x_2 + 16\,384$

$A^2_{(x2)} = -72x_2^3 + 1\,344x_2^2 - 8\,192x_2 + 16\,384$

Schnittpunktkoordinaten von $f_{(x)}$ und $g_{(x)}$:

$\sqrt{4x} = \sqrt{-8*(x-8)}$ |²

$4x = -8(x-8)$

$4x = -8x + 64$ |+8x

$12x = 64$ |:12

$$x = \frac{16}{3} = 5{,}33$$

Nullstelle von $g_{(x)}$:

$\sqrt{-8*(x-8)} = 0$ |²

$-8(x-8) = 0$

$-8x + 64 = 0$ |+8x

$8x = 64$ |:8

$x = 8$ ---> $5{,}33 < x_2 < 8$

$A^{2\prime}_{(x2)} = -216x_2^2 + 2\,688x_2 - 8\,192$

$-216x_2^2 + 2\,688x_2 - 8\,192 = 0$ |*(-1)

$216x_2^2 - 2\,688x_2 + 8\,192 = 0$

A, B, C - Formel

A = 216 ; B = -2 688; C = 8 192

$$x_{21,2} = \frac{-(-2\,688) \pm \sqrt{(-2688)^2-4*216*8192}}{2*216}$$

$$x_{21,2} = \frac{2\,688 \pm 384}{432}$$

$x_{21} = 7{,}11$

$x_{22} = 5,33$ keine Lösung

$x_1 = - 2 * 7,11 + 16 = 1,78$

$x = 7,11 - 1,78 = 5,33$

$y = g_{(7,11)} = \sqrt{- 8(7,11 - 8)} = 2,67$

$A^2''_{(x2)} = - 432x_2 + 2\,688$

$A^2''_{(7,11)} = - 432 * 7,11 + 2\,688 = - 383,52 < 0$ --> Maximum

$A_{(7,11)} = 5,33 * 2,67 = 14,23$ FE gerundet

$A_{(5,33)} = (3 * 5,33 - 16) * \sqrt{(-8*(5,33 - 8)} = 0 < 14,23$ FE

$A_{(8)} = (3 * 8 - 16) * \sqrt{(-8*(8 - 8)} = 0 < 14,23$ FE