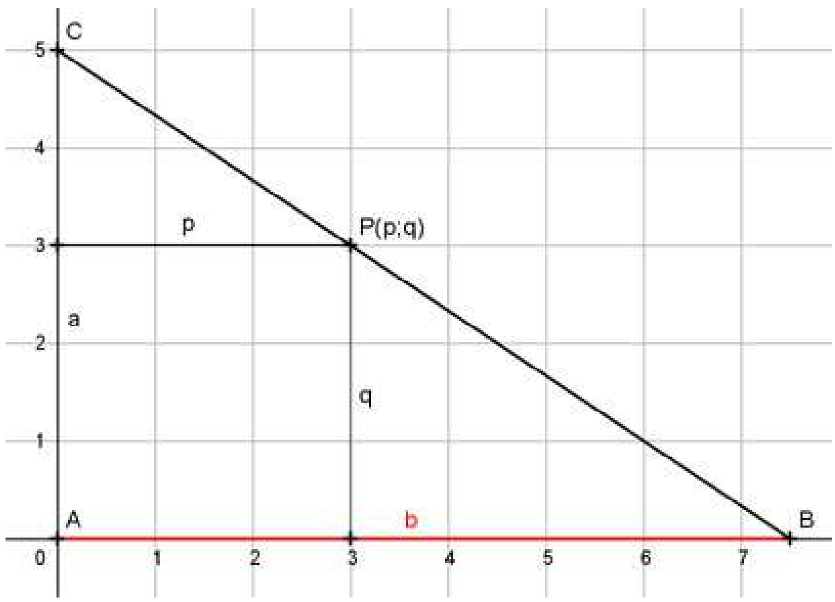
Extrem Aufgabe 154

Wie groß ist b, wenn der Punkt P die Koordinaten (p,q) hat und der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC minimal sein soll?



Zielfunktion:

$$A = \frac{a * b}{2}$$

Nebenbedingung:

Strahlensatz:

$$\frac{a}{q} = \frac{b}{b - p} \quad | *q$$

$$a = \frac{b * q}{b - p}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A_{(b)} = \frac{b * q * b}{2(b - p)} = \frac{b^2 * q}{2(b - p)} \qquad p < b < \infty$$

Zu untersuchende Funktion:

$$A_{(b)} = \frac{b^2 * q}{b - p}$$

Quotientenregel:

$u' = 2bq$

$v' = 1$

$$A'_{(b)} = \frac{2bq * (b - p) - 1 * b^2q}{(b - p)^2}$$

$$A'_{(b)} = \frac{2b^2q - 2bqp - b^2q}{(b - p)^2} = \frac{b^2q - 2bqp}{(b - p)^2}$$

$$\frac{b^2q - 2bqp}{(b - p)^2} = 0 \quad | *(b - p)^2$$

$bq * (b - 2p) = 0$

$b_1q = 0 \mid :q$

$b_1 = 0$ keine Lösung

$b - 2p = 0 \mid +2p$

$b = 2p$

$$a = \frac{2p * q}{2p - p} = 2q$$

Zur Beurteilung, ob $A''_{(b)} >$ oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u = b^2q - 2bqp$, $u' = 2bq - 2qp$

$$A''_{(b)} = \frac{2bq - 2qp}{(b - p)^2} = \frac{2q * (b - p)}{(b - p)^2} = \frac{2q}{b - p} > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$A_{(b)} = \frac{2q * 2p}{2} = 2pq \quad \text{absolutes Minimum, weil}$$

$$A_{(p)} = \frac{p^2 * q}{p - p} \longrightarrow \infty > 2pq$$

$$A_{(\infty)} = \frac{\infty^2 * q}{\infty - p} \longrightarrow \infty > 2pq$$