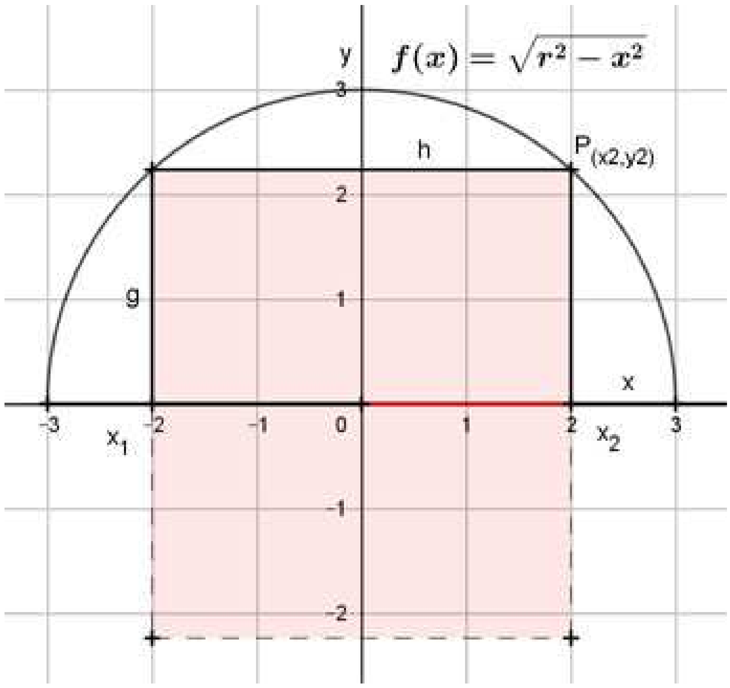
Extrem Aufgabe 164

Wie lautet die x-Koordinate des Punktes P auf dem Halbkreis, beschrieben durch $f_{(x)}$, wenn das einbeschriebene Rechteck um die x-Achse rotiert und der entstehende Zylinder maximales Volumen V haben soll?



Zielfunktion:

$V = \pi * g^2 * h$

Nebenbedingung:

$h = |x_1| + x_2 = 2 * x_2$ wegen Achsensymmetrie

$g = y_{(2)} = \sqrt{r^2 - (x_2)^2}$

$g^2 = r^2 - x_2^2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$V_{(x2)} = \pi * (r^2 - x_2^2) * 2x_2$

$V_{(x2)} = 2\pi * (x_2 r^2 - x_2^3)$ $0 < x_2 < r$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(x2)} = x_2 r^2 - x_2^3$

$V'_{(x2)} = r^2 - 3x_2^3$

$r^2 - 3x_2^2 = 0 \quad |+3x_2^2$

$3x_2^2 = r^2 \quad |:3$

$$x_2^2 = \frac{r^2}{3} \quad |\sqrt{}$$

$$\mathbf{x_2 = \frac{r}{\sqrt{3}}}$$

$$h = \frac{2 * r}{\sqrt{3}}$$

$$g^2 = r^2 - \frac{r^2}{3} = \frac{2}{3} * r^2$$

$V''_{(x2)} = - 9x_2^2 < 0$ --> Maximum

$$V_{(r/\sqrt{3})} = \pi * \frac{2}{3} r^2 * \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3} * r^3}{9}$$ absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = 2\pi * (0 * r^2 - 0^3) = 0 > \frac{4\pi\sqrt{3} * r^3}{9}$$

$$V_{(r)} = 2\pi * (r * r^2 - r^3) = 0 > \frac{4\pi\sqrt{3} * r^3}{9}$$