Extrem Aufgabe 172

Ein Betrieb arbeitet mit der Gesamtkostenfunktion
$K_{(x)} = x^3 - 10x^2 + 37x + 102$ und der Erlösfunktion $E_{(x)} = 50x$ für
$0 \leqq x \leqq 11$.
a) Wie groß ist der maximale Gewinn G?
b) Wie groß ist x im Betriebsoptimum?
c) Wie groß ist x im Betriebsminimum?

a)

$G_{(x)} = E_{(x)} - K_{(x)}$

$G_{(x)} = 50x - (x^3 - 10x^2 + 37x + 102)$

$G_{(x)} = - x^3 + 10x^2 + 13x - 102$

$G'_{(x)} = - 3x^2 + 20x + 13$

$- 3x^2 + 20x + 13 = 0$

A, B, C - Formel

A = - 3 ; B = 20 ; C = 13

$$x_{1,2} = \frac{- 20 \pm \sqrt{20^2 - 4*(-3)*13}}{2 * (- 3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{- 20 \pm 23{,}6}{- 6}$$

$x_1 = 7{,}27$ ME

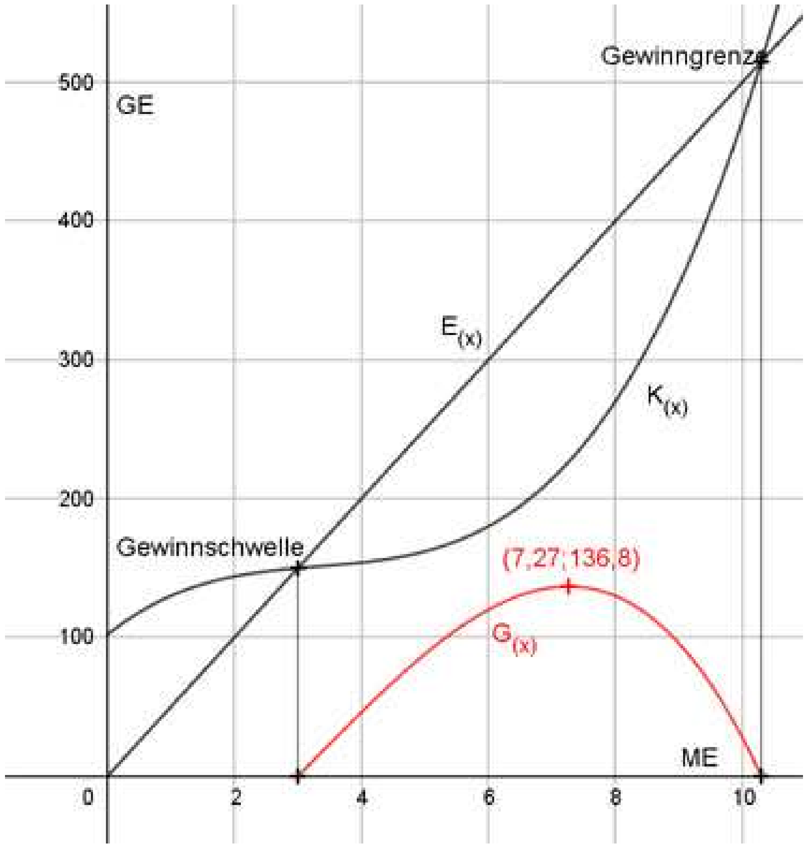
$x_2 = 0{,}9$ ME

$G''_{(x)} = - 6x + 20$

$G''_{(7{,}27)} = - 6 * 7{,}27 + 20 = - 23{,}62 < 0$ --> Maximum

$G''_{(0{,}9)} = - 6 * 0{,}9 + 20 = 14{,}6 > 0$

$G_{(7{,}27)}$ = $- 7{,}27^3 + 10 * 7{,}27^2 + 13 * 7{,}27 - 102 =$ **136,8 GE** gerundet



b)

Betriebsoptimum = Minimum der Stückkosten $k_{(x)} = \frac{K_{(x)}}{x}$

$$k_{(x)} = \frac{x^3 - 10x^2 + 37x + 102}{x} = x^2 - 10x + 37 + \frac{102}{x}$$

$$k'_{(x)} = 2x - 10 - \frac{102}{x^2}$$

$$2x - 10 - \frac{102}{x^2} = 0 \mid {}^{*}x^2$$

$$2x^3 - 10x^2 - 102 = 0$$

$$k''_{(x)} = 2 + \frac{204}{x^3} > 0 \dashrightarrow \text{Minimum}$$

Newtonsches Näherungsverfahren:

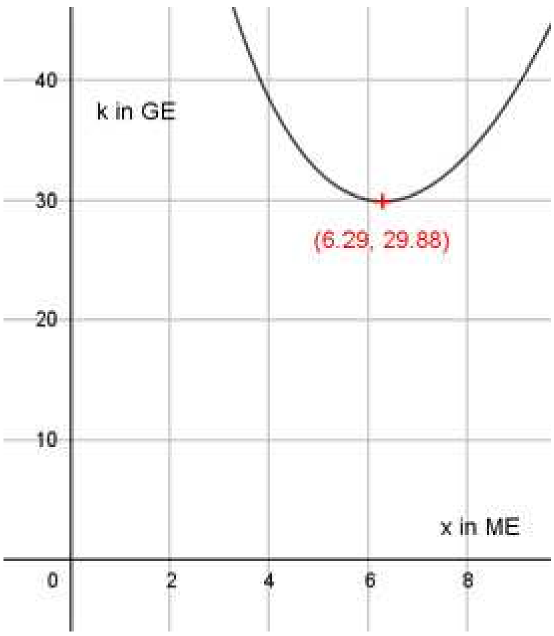
x	5	6	7
y	- 102	-30	194

Vorzeichenwechsel zwischen 6 und 7, gewählt $x_0 = 6{,}3$

$$x_1 = x_0 - \frac{k'_{(x0)}}{k''_{(x0)}} = 6{,}3 - \frac{0{,}03}{1{,}63} = 6{,}28$$

$$\color{red}{\mathbf{x_2 =}}\ 6{,}28 - \frac{-\,0{,}026}{2{,}82} = \color{red}{\mathbf{6{,}29\ ME}}$$

$$k_{(6{,}29)} = 6{,}29^2 - 10 * 6{,}29 + 37 + \frac{102}{6{,}29} = 29{,}88\ GE$$



c)

Betriebsminimum = Minimum der variablen Stückkosten $k_{v(x)} = \frac{K_{v(x)}}{x}$

$$K_{v(x)} = x^3 - 10x^2 + 37x$$

$$k_{v(x)} = \frac{x^3 - 10x^2 + 37x}{x} = x^2 - 10x + 37$$

$$k_v'_{(x)} = 2x - 10$$

$$2x - 10 = 0 |\ +10$$

$2x = 10$ |:2

$x = 5$ ME

$k_v''_{(x)} = 2 > 0$ --> Minimum

$k_{v(5)} = 5^2 - 10 * 5 + 37 = 12$ GE