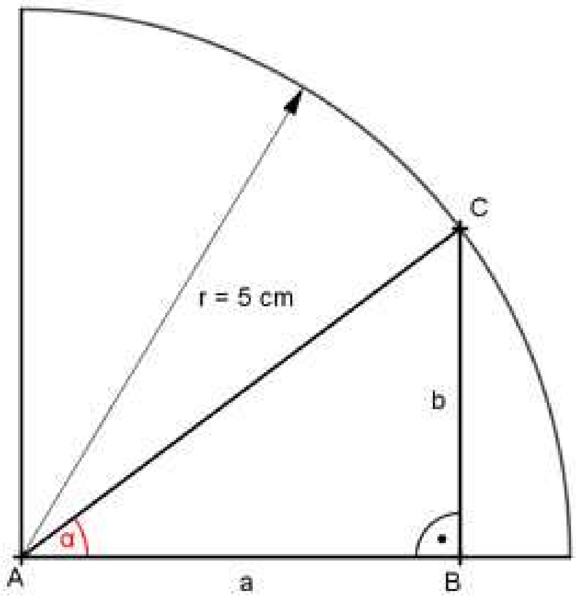
Extrem Aufgabe 180

Wie groß ist der Winkel α, wenn der Flächeninhalt A des Dreiecks maximal sein soll?



Zielfunktion:

$$A = \frac{a * b}{2}$$

$$A^2 = \frac{a^2 * b^2}{4}$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$r^2 = a^2 + b^2$

$25 = a^2 + b^2 \quad |-b^2$

$a^2 = 25 - b^2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A^2_{(b)} = \frac{(25 - b^2) * b^2}{4}$$

Zu untersuchende Funktion:

$A^2{}_{(b)} = 25b^2 - b^4$ $\quad\quad\quad$ $0 < b < 5$ cm

$A^2{}'_{(b)} = 50b - 4b^3$

$50b - 4b^3 = 0$

$b * (50 - 4b^2) = 0$

$b_1 = 0$ keine Lösung

$50 - 4b^2 = 0 \mid +4b^2$

$4b^2 = 50 \mid :4$

$b^2 = 12{,}5 \mid \sqrt{}$

$b_{1,2} = \pm \sqrt{12{,}5}$

$b_1 = \sqrt{12{,}5}$ cm $= 3{,}54$ cm

$b_2 = - \sqrt{12{,}5}$ keine Lösung

$a^2 = 25 - 12{,}5 = 12{,}5 \mid \sqrt{}$

$a = \sqrt{12{,}5}$

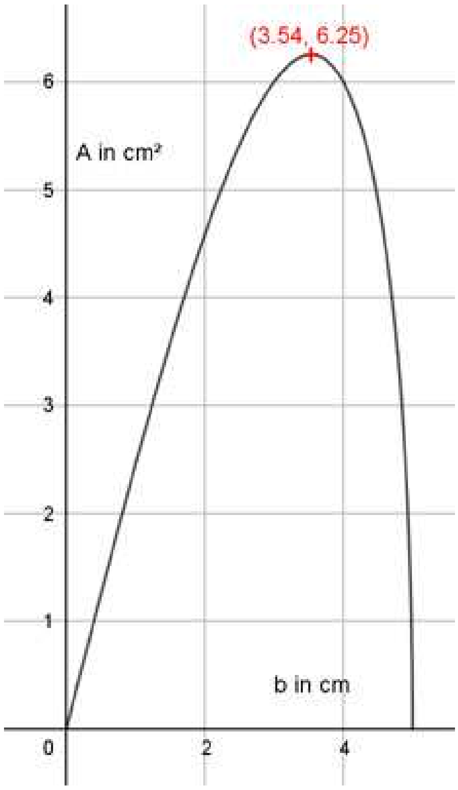
$A^2{}''_{(b)} = 50 - 12b^2$

$A^2{}''_{(\sqrt{12,5})} = 50 - 12 * 12{,}5 = - 100 < 0$ --> Maximum

$A_{(\sqrt{12,5})} = \dfrac{\sqrt{12{,}5} * \sqrt{12{,}5}}{2} = 6{,}25$ cm² absolutes Maximum, weil

$A^2{}_{(0)} = 25 * 02 - 0^4 = 0$ --> $A_{(0)} = 0 < 6{,}25$ cm²

$A^2{}_{(5)} = 25 * 5^2 - 5^4 = 0$ --> $A_{(5)} = 0 < 6{,}25$ cm²



Im Dreieck ABC gilt:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{12{,}5}}{\sqrt{12{,}5}} = 1 \;\text{-->}\; \boldsymbol{\alpha = 45°}$$