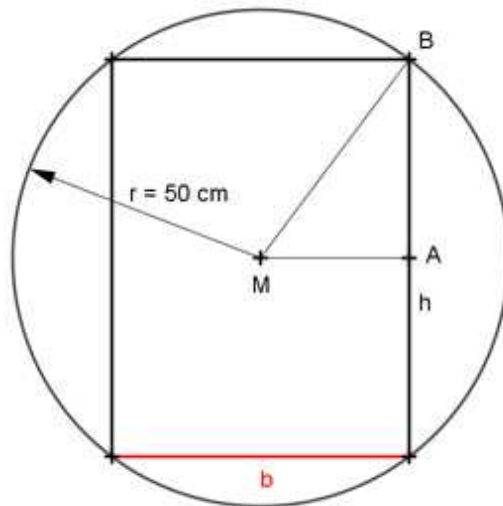


Extrem Aufgabe 184

Wie groß ist die Breite b eines Balkens, der aus einem Baumstamm mit dem Radius $r = 50$ cm geschnitten wird und dessen Tragfähigkeit $T = b * h^2$ maximal sein soll?



Zielfunktion:

$$T = b * h^2$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck MAB:

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4} \quad | *4$$

$$4r^2 = h^2 + b^2 \quad | -b^2$$

$$h^2 = 10\,000 - b^2$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$T_{(b)} = b * (10\,000 - b^2)$$

$$T_{(b)} = 10\,000b - b^3 \quad 0 < b < 2r$$

$$T'_{(b)} = 10\,000 - 3b^2$$

$$10\,000 - 3b^2 = 0 \quad | +3b^2$$

$$3b^2 = 10\,000 \quad | :3$$

$$b^2 = \frac{10\,000}{3} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$b = 57,74 \text{ cm}$$

$$h^2 = 10\,000 - \frac{10\,000}{3}$$

$$h^2 = \frac{2 * 10\,000}{3} \quad | \sqrt{\quad}$$

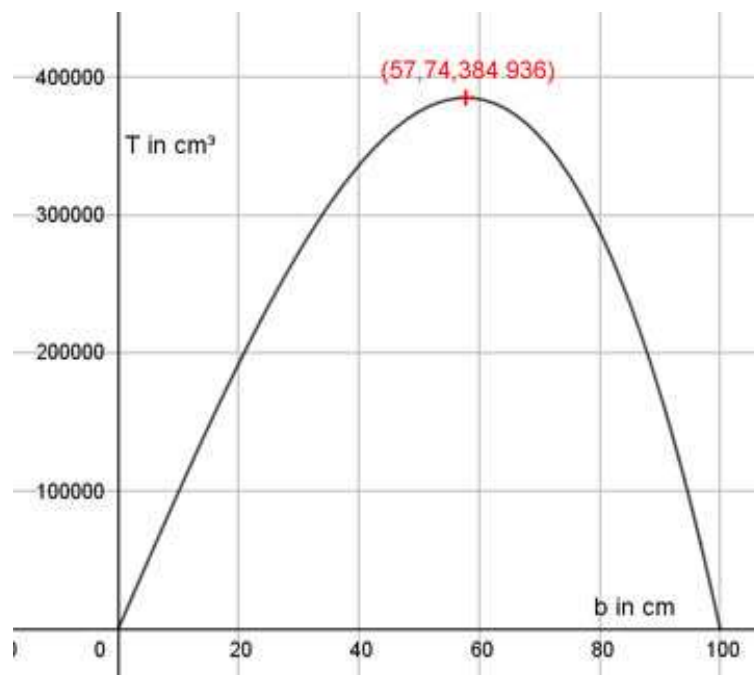
$$h = 81,65 \text{ cm}$$

$$T''(b) = -6b < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

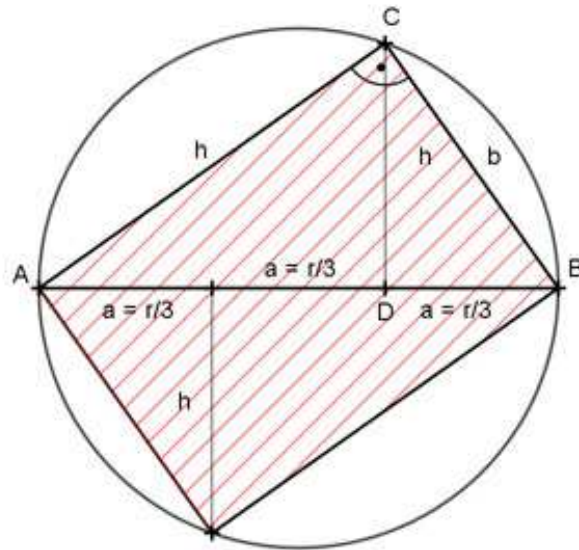
$$T(b) = 57,74 \text{ cm} * 81,65^2 \text{ cm}^2 = 384\,936 \text{ cm}^3 \text{ absolutes Maximum, weil}$$

$$T(0) = 10\,000 * 0 - 0^3 = 0 \text{ cm}^3 > 384\,936 \text{ cm}^3$$

$$T(2r) = 10\,000 * 2 * 50 - (2 * 50)^3 = 0 \text{ cm}^3 < 384\,936 \text{ cm}^3$$



Bemerkung zur sogenannten Zimmermannsregel:



Sie dient der Bestimmung der Höhe und der Breite eines Balkens höchster Tragfähigkeit, der aus einem Baumstamm geschnitten werden kann.

1. Schritt

Durchmesser des Baumstamms in 3 gleiche Teile teilen.

2.

Höhe h auf den Teilungspunkten errichten.

Es entstehen 2 gleich große rechtwinklige Dreiecke (Thaleskreis) mit der gesuchten Höhe und Breite des Balkens.

3. Berechnung

Höhensatz im Dreieck ABC:

$$h^2 = 2a \cdot a = 2a^2 = 2 \cdot \left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{2 \cdot d^2}{9}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck DBC:

$$b^2 = a^2 + h^2$$

$$b^2 = \left(\frac{d}{3}\right)^2 + \frac{2 \cdot d^2}{9}$$

$$b^2 = \frac{d^2}{3} = \frac{(2 \cdot 50) \text{ cm}^2}{3} = \frac{10\,000}{3} \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$b = 57,74 \text{ cm}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$$(3 * a)^2 = h^2 + b^2 \quad | -b^2$$

$$h^2 = 3 * \left(\frac{2 * 50}{3}\right)^2 + \frac{10\,000}{3} = \frac{2 * 10\,000}{3} \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$h = 81,65 \text{ cm}$$