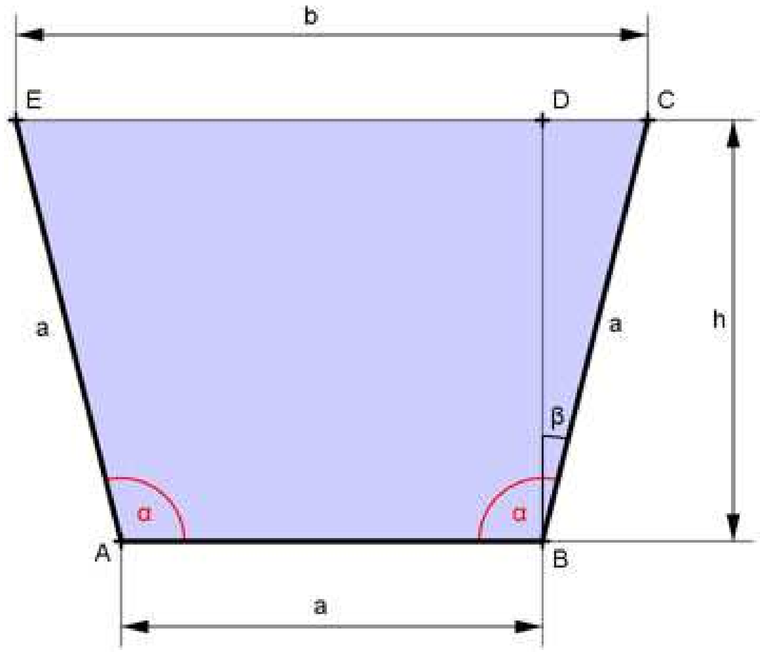
Extrem Aufgabe 186

Wie groß muss der Winkel α an der Grundseite a der Blechrinne in Form eines gleichschenkligen Trapezes sein, wenn sie aus 3 gleich langen Stücken besteht und die Querschnittsfläche A der Rinne maximal sein soll?



Zielfunktion:

Die Querschnittsfläche A besteht aus einem Rechteck und 2 gleich großen Dreiecken:

$$A = a * h + 2 * \frac{a * h * \sin \beta}{2}$$

Nebenbedingung:

Im Dreieck BCD gilt:

$$\cos \beta = \frac{h}{a} \quad | *a$$

$$h = a * \cos \beta$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A_{(\beta)} = a * a * \cos \beta + a * a * \cos \beta * \sin \beta$$

$$A_{(\beta)} = a^2 * \cos \beta * (1 + \sin \beta)$$

Zu untersuchende Funktiom:

$A_{(\beta)} = \cos \beta * (1 + \sin \beta)$ $\quad$ $0° < \beta < 90°$

Produktregel:

$u' = - \sin \beta * a^2$

$v' = \cos \beta$

$A'_{(\beta)} = - \sin \beta * (1 + \sin \beta) + \cos \beta * \cos \beta$

$A'_{(\beta)} = - \sin \beta - \sin^2 \beta + \cos^2 \beta$

$A'_{(\beta)} = - \sin \beta - \sin^2 \beta + (1 - \sin^2 \beta)$

$A'_{(\beta)} = 1 - 2\sin^2 \beta - \sin \beta$

$- 2\sin^2 \beta - \sin \beta + 1 = 0 \quad |*(-1)$

$2\sin^2 \beta + \sin \beta - 1 = 0$

A, B, C - Formel

A = 2 ; B = 1 ; C = - 1

$$\sin \beta_{1,2} = \frac{- 1 \pm \sqrt{1^2 - 4*2*(-1)}}{2 * 2}$$

$$\sin \beta_{1,2} = \frac{- 1 \pm 3}{4} = - 1$$

$$\sin \beta_1 = \frac{- 4}{4} = - 1 \text{ --> } \beta_1 = - 90° \text{ keine Lösung}$$

$$\sin \beta_2 = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ --> } \beta_2 = 30° \text{ --> } \boldsymbol{\alpha = 120°}$$

$h = a * \cos 30° = 0,866 * a$

$A''_{(\beta)} = - 4\cos^2 \beta - \cos \beta < 0$ --> Maximum

$A_{(30°)} = a^2 * \cos 30° (1 + \sin 30°) = a^2 * 1,3$ absolutes Maximum, weil

$$A_{(0°)} = a * 1 * a + 2 * \frac{a * 1 * a * 0}{2} = a^2 < 1,3 * a^2$$

$$A_{(90°)} = a * 0 * a + 2 * \frac{a * 0 * a * 1}{2} = 0 < 1,3 * a^2$$