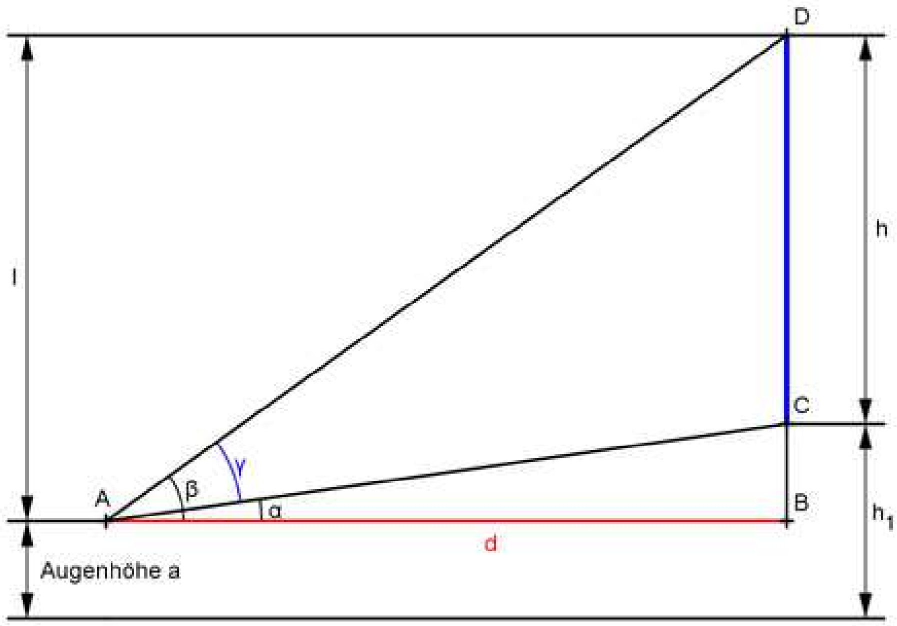
Extrem Aufgabe 188

In welcher Entfernung d sieht ein Betrachter das Bild unter dem größten Sehwinkel γ?



Zielfunktion:

$\gamma = \beta - \alpha$

Nebenbedingung:

Im Dreieck ABD gilt:

$$\tan \beta = \frac{l}{d} \implies \beta = \arctan \frac{l}{d}$$

Im Dreieck ABC gilt:

$$\tan \alpha = \frac{l - h}{d} \implies \alpha = \arctan \frac{l - h}{d}$$

$l = h + (h_1 - a)$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$\gamma = \arctan \frac{l}{d} - \arctan \frac{l - h}{d} \qquad 0 < d < \infty$$

Summen- und Kettenregel:

$$y'_{(d)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{d}\right)^2} * \left(- \frac{l}{d^2}\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{l - h}{d}\right)^2} * \left(- \frac{l - h}{d^2}\right)$$

$$y'_{(d)} = - \frac{l}{d^2 + l^2} + \frac{l - h}{d^2 + (l - h)^2}$$

$$y'_{(d)} = \frac{- l * [d^2 + (l - h)^2] + (d^2 + l^2) * (l - h)}{(d^2 + l^2) * [d^2 + (l - h)^2]}$$

$$y'_{(d)} = \frac{- l * (d^2 + l^2 - 2lh + h^2) + (d^2l - d^2h + l^3 - l^2h)}{(d^2 + l^2) * [d^2 + (l - h)^2]}$$

$$y'_{(d)} = \frac{- ld^2 - l^3 + 2l^2h - lh^2 + d^2l - d^2h + l^3 - l^2h}{(d^2 + l^2) * [d^2 + (l - h)^2]}$$

$$y'_{(d)} = \frac{l^2h - lh^2 - d^2h}{(d^2 + l^2) * [d^2 + (l - h)^2]}$$

$$\frac{l^2h - lh^2 - d^2h}{(d^2 + l^2) * [d^2 + (l - h)^2]} = 0 \quad | * (d^2 + l^2) * [d^2 + (l - h)^2]$$

$l^2h - lh^2 - d^2h = 0$

$h * (l^2 - lh - d^2) = 0$

h = 0 keine Lösung

$l^2 - lh + d^2 = 0 \quad |+d^2$

$d^2 = l^2 - lh = l * (l - h) \quad |\sqrt{}$

$d = \sqrt{l(l - h)}$

Zur Beurteilung, ob $y''_{(d)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u = l^2h - lh^2 - d^2h \quad u' = - 2dh$

$$y''_{(d)} = \frac{-2dh}{(d^2 + l^2) * [d^2 + (l - h)^2]} = \frac{< 0}{> 0} = < 0 \text{ --> Maximum}$$