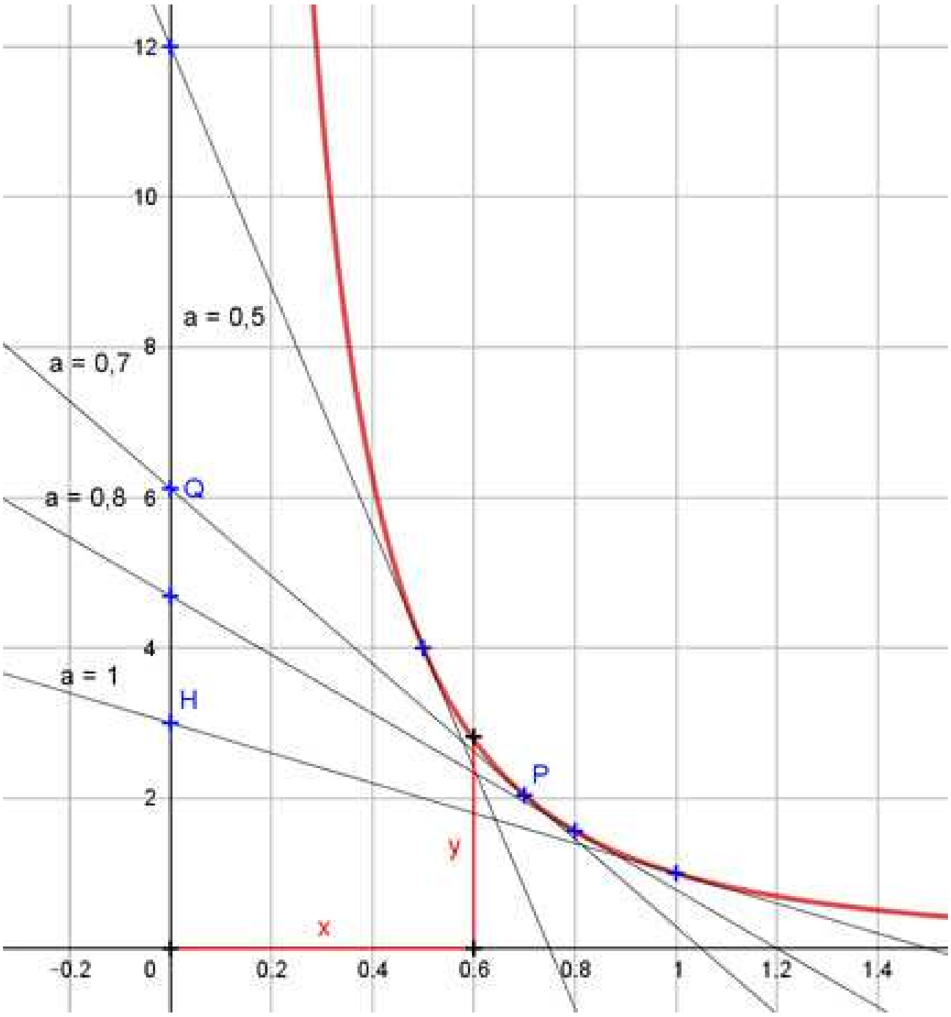
Extrem Aufgabe 192

Die Schar der Geraden durch die Punkte P(a,1/a²) und Q(0,3/a²) hüllt eine Kurve ein. Wie lautet deren Funktionsgleichung für 0 ≦ a ≦ 1?



Lösungsverfahren:

Ermittlung der Gleichung der Geraden, die durch P und Q gehen.

Einsetzen der Punktkoordinaten von P und Q in y = mx + b.

$$\frac{1}{a^2} = am + b \quad (1) \qquad a \neq 0$$

$$\frac{3}{a^2} = 0m + b$$

$$b = \frac{3}{a^2}$$

In (1) eingesetzt:

$$\frac{1}{a^2} = am + \frac{3}{a^2} \quad | - \frac{1}{a^2}$$

$$am + \frac{2}{a^2} = 0 \quad | \, {*a^2}$$

$$a^3m + 2 = 0 \quad |-2$$

$$a^3m = -2 \quad |:a^3$$

$$m = -\frac{2}{a^3}$$

$$y_{(a)} = -\frac{2}{a^3}x + \frac{3}{a^2}$$

$$y'_{(a)} = \frac{6}{a^4}x - \frac{6}{a^3}$$

$$\frac{6}{a^4}x - \frac{6}{a^3} = 0 \quad | \, {*a^4}$$

$$6x - 6a = 0 \quad |+6a$$

$$6x = 6a \quad |6$$

$$a = x$$

$$y''_{(a)} = -\frac{24}{a^5} + \frac{18}{a^4} < 0 \dashrightarrow \text{Maximum}$$

$$y = \left(-\frac{2}{x^3}\right)x + \frac{3}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$