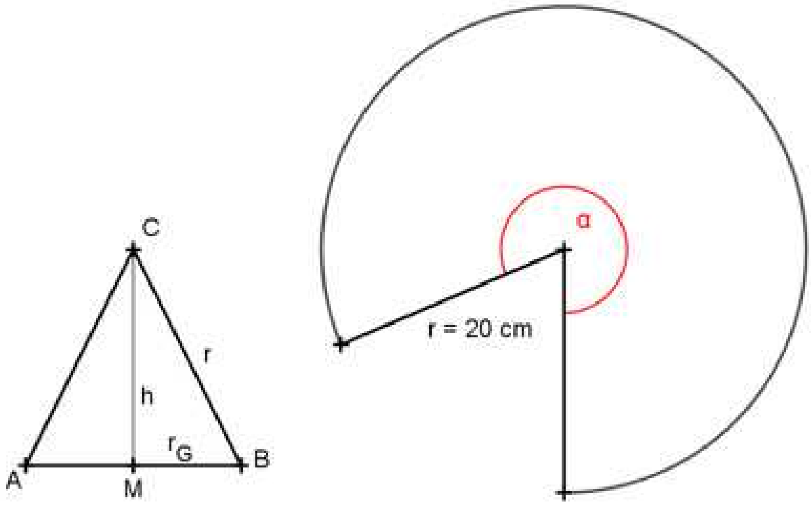
Extrem Aufgabe 196

Wie groß ist der Mittelpunktswinkel α eines Kreisausschnitts aus Blech mit dem Radius r = 20 cm, der zu einem offenen Kegel mit maximalem Volumen V gebogen werden soll?



Zielfunktion:

$$V = \frac{\pi * r_g^2 * h}{3}$$

Nebenbedingung:

Die Bogenlänge des Kreisausschnitts entspricht dem Umfang des Grundkreises.

$$2 * \pi * r_G = \frac{2 * \pi * r * \alpha}{360°} \quad | :2\pi$$

$$r_G = \frac{r * \alpha}{360°}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck MBC:

$$r^2 = h^2 + r_G^2 \quad |-r_G^2$$

$$h^2 = r^2 - \frac{r^2 * \alpha^2}{360°^2}$$

$$h^2 = r^2 * \left(1 - \frac{a^2}{360^2}\right)$$

$$h = \sqrt{r^2 * \left(1 - \frac{a^2}{360^2}\right)}$$

$$h = r * \sqrt{1 - \frac{a^2}{360^2}}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(a)} = \frac{\pi * \frac{r^2 * a^2}{360^2} * r * \sqrt{1 - \frac{a^2}{360^2}}}{3}$$

$$V_{(a)} = \frac{\pi * r^3}{3 * 360^2} * a^2 * \sqrt{1 - \frac{a^2}{360^2}}$$

$$V_{(a)} = \frac{\pi * r^3}{3 * 360^3} * a^2 * \sqrt{360^2 - a^2}$$

Zu untersuchende Funktion:

$$V_{(a)} = a^2 * \sqrt{360^2 - a^2} \qquad 0° < a < 360°$$

Produkt- und Kettenregel:

$$u' = 2 * a$$

$$v' = \frac{0{,}5 * (-2a)}{\sqrt{360^2 - a^2}}$$

$$V'_{(a)} = 2a * \sqrt{360^2 - a^2} - \frac{a * a^2}{\sqrt{360^2 - a^2}}$$

$$V'_{(a)} = \frac{2a * (360^2 - a^2) - a^3}{\sqrt{360^2 - a^2}}$$

$$\frac{2\alpha \cdot (360^2 - \alpha^2) - \alpha^3}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}} = 0 \quad | \cdot \sqrt{360^2 - \alpha^2}$$

$2\alpha * 360^2 - 2\alpha^3 - \alpha^3 = 0$

$2\alpha * 360^2 - 3\alpha^3 = 0$

$\alpha * (2 * 360^2 - 3\alpha^2) = 0$

$\alpha_1 = 0$ keine Lösung

$2 * 360^2 - 3\alpha^2 = 0 \mid +3\alpha^2$

$3\alpha^2 = 2 * 360^2 \mid :3$

$\alpha^2 = 86\,400 \mid \sqrt{}$

$\alpha = 293{,}9°$

$$r_G = \frac{20 \text{ cm} * 293{,}9°}{360°} = 16{,}3 \text{ cm gerundet}$$

$$h = 20 \text{ cm} * \sqrt{1 - \frac{293{,}9^2}{360^2}} = 11{,}6 \text{ cm gerundet}$$

Zur Beurteilung, ob $V''_{(\alpha)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u = 2\alpha * 360^2 - 2\alpha^3 - \alpha^3 = 2\alpha * 360^2 - 3\alpha^3$

$u' = 2 * 360^2 - 9\alpha^2$

$$V''_{(\alpha)} = \frac{2 * 360^2 - 9\alpha^2}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}$$

$$V''_{(\alpha)} = \frac{2 * 360^2 - 9\alpha^2}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}$$

$$V''_{(293{,}9°)} = \frac{2 * 360^2 - 9 * 293{,}9^2}{\sqrt{360^2 - 293{,}9^2}} = \frac{< 0}{> 0} = < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$V_{(293{,}9°)} = \frac{\pi \cdot 16{,}3^2 \cdot 11{,}6}{3}\ cm^3 = 3\ 226\ cm^3$$ gerundet absolutes Maximum, weil

$$V_{(0°)} = \frac{\pi \cdot 20^3}{3 \cdot 360^3} \cdot 0^2 \cdot \sqrt{360^2 - 0^2}\ cm^3 = 0\ cm^3 < 3\ 226\ cm^3$$

$$V_{(360°)} = \frac{\pi \cdot 20^3}{3 \cdot 360^3} \cdot 360^2 \cdot \sqrt{360^2 - 360^2}\ cm^3 = 0\ cm^3 < 3\ 226\ cm^3$$