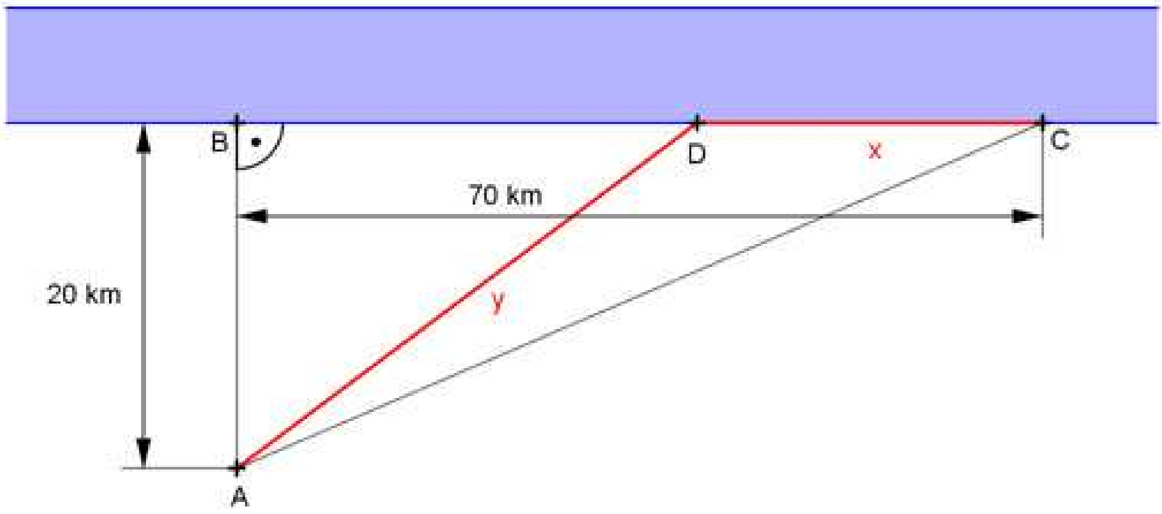
Extrem Aufgabe 198

Wie weit von C entfernt sollte auf dem Kanal ein Schiff die Fracht übernehmen, die von A nach C transportiert werden soll, wenn der Transport mit einem Schiff 80% der Lkw-Kosten beträgt und die Gesamtkosten K minimal sein sollen? (Siehe Aufgabe 185)




Zielfunktion:

$K = y + 0{,}8x$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ADB:

$y^2 = 20^2 + (70 - x)^2$

$y^2 = 400 + 4900 - 140x + x^2 \quad |\sqrt{\phantom{x}}$

$y = \sqrt{x^2 - 140x + 5\,300}$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$K_{(x)} = \sqrt{x^2 - 140x + 5\,300} + 0{,}8x \qquad 0 < x < 70 \text{ km}$

$$K'_{(x)} = 0{,}5 \cdot \frac{2x - 140}{\sqrt{x^2 - 140x + 5\,300}} + 0{,}8$$

$$K'_{(x)} = \frac{x - 70 + 0{,}8 \cdot \sqrt{x^2 - 140x + 5\,300}}{\sqrt{x^2 - 140x + 5\,300}}$$

$$\frac{x - 70 + 0{,}8 * \sqrt{x^2 - 140x + 5\,300}}{\sqrt{x^2 - 140x + 5\,300}} = 0 \quad | * \sqrt{x^2 - 140x + 5\,300}$$

$x - 70 + 0{,}8 * \sqrt{x^2 - 140x + 5\,300} = 0 \quad |+70 - x$

$0{,}8 * \sqrt{x^2 - 140x + 5\,300} = 70 - x \quad |:0{,}8$

$\sqrt{x^2 - 140x + 5\,300} = 87{,}5 - 1{,}25x \quad |^2$

$x^2 - 140x + 5\,300 = 7\,656{,}25 - 218{,}75x + 1{,}5625x^2 \quad | -x^2 + 140x - 5300$

$0{,}5625x^2 - 78{,}75x + 2\,356{,}25 = 0$

A, B, C - Formel

A = 0,5625 ; B = -78,75 ; C = 2 356,25

$$x_{1,2} = \frac{-(-78{,}75) \pm \sqrt{(-78{,}75)^2 - 4*0{,}5625*3256{,}25}}{2 * 0{,}5625}$$

$$x_{1,2} = \frac{78{,}75 \pm 30}{1{,}125}$$

$$x_1 = \frac{108{,}75}{1{,}125} = 96{,}67 \text{ km keine Lösung} > 70 \text{ km}$$

$$\mathbf{x_2 =} \frac{48{,}75}{1{,}125} \text{ km} = \mathbf{43{,}3\ km} \text{ gerundet}$$

$y = \sqrt{43{,}3^2 - 140 * 43{,}3 + 5\,300}$ km = 33,4 km gerundet

Zur Beurteilung, ob $K''_{(x)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$$u' = 1 + 0{,}8 * 0{,}5 * \frac{2x - 140}{\sqrt{x^2 - 140x + 5\,300}}$$

$$K''_{(x)} = \frac{\sqrt{x^2 - 140x + 5\,300} + 0{,}8x - 56}{x^2 - 140x + 5\,300}$$

$$K''_{(43,3)} = \frac{33{,}4 + 0{,}8 * 43{,}3 - 56}{43{,}3^2 - 140 * 43{,}3 + 5\,300}$$

$$K''_{(43,3)} = \frac{12{,}04}{1\,112{,}9} > 0 \text{ --> Minimum}$$

$K_{(43,3)} = 33{,}4$ GE + $0{,}8 * 43{,}3$ GE = 68 GE absolutes Minimum, weil

$K_{(0)} = \sqrt{0^2 - 140 * 0 + 5\,300} + 0{,}8 * 0$ GE = 72,8 GE > 68 GE

$K_{(70)} = \sqrt{70^2 - 140 * 70 + 5\,300} + 0{,}8 * 70$ GE = 76 GE > 68 GE