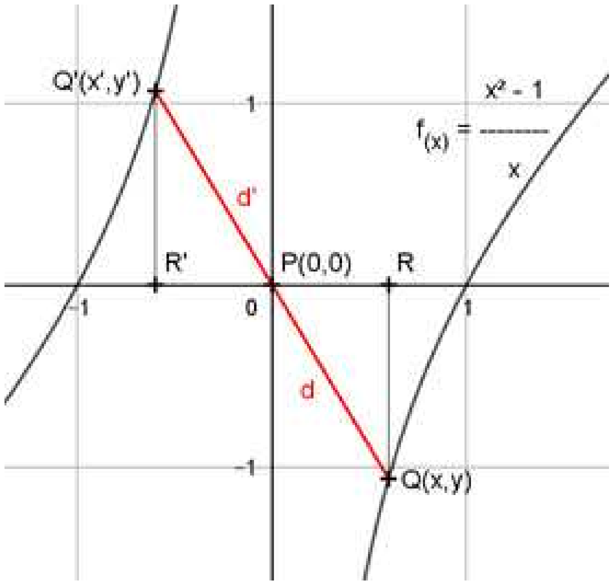
Extrem Aufgabe 202

Wie groß ist der kürzeste Abstand d des Punktes P von einem Punkt Q bzw. Q' auf $f_{(x)}$?



Zielfunktion:

$d^2 = PR^2 + QR^2$

Nebenbedingung:

$PR = x$

$$QR = y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$d^2_{(x)} = x^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)^2$$

$$d^2_{(x)} = x^2 + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}$$

$$d^2_{(x)} = \frac{2x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}$$

Quotientenregel:

$u' = 8x^3 - 4x$

$v' = 2x$

$$d^{2\prime}_{(x)} = \frac{(8x^3 - 4x) * x^2 - 2x * (2x^4 - 2x^2 + 1)}{x^4}$$

$$d^{2\prime}_{(x)} = \frac{8x^5 - 4x^3 - 4x^5 + 4x^3 - 2x}{x^4}$$

$$d^{2\prime}_{(x)} = \frac{4x^5 - 2x}{x^4}$$

$$\frac{4x^5 - 2x}{x^4} = 0 \mid *x^4$$

$4x^5 - 2x = 0$

$2x * (2x^4 - 1) = 0$

$2x = 0 \mid :2$

$x_1 = 0$ keine Lösung, entspricht der x-Koordinate von P

$2x^4 - 1 = 0 \mid +1$

$2x^4 = 1 \mid :2$

$x^4 = 0{,}5 \mid \sqrt[4]{}$

$x = \pm\, 0{,}84$

Zur Beurteilung, ob $d^{2\prime\prime}_{(x)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u' = 20x^4 - 2$

$$d^{2\prime\prime}_{(x)} = \frac{20x^4 - 2}{x^4} = 20 - \frac{2}{x^4} > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$d^{2\prime\prime}_{(x)} = 20 - \frac{2}{0{,}84^4} > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$d^2_{(0,84)} = \frac{2 * 0{,}84^4 - 2 * 0{,}84^2 + 1}{0{,}84^2}$$

$d^2_{(0,84)} = 0{,}828 \; |\sqrt{}$

d = d' = 0,91 gerundet