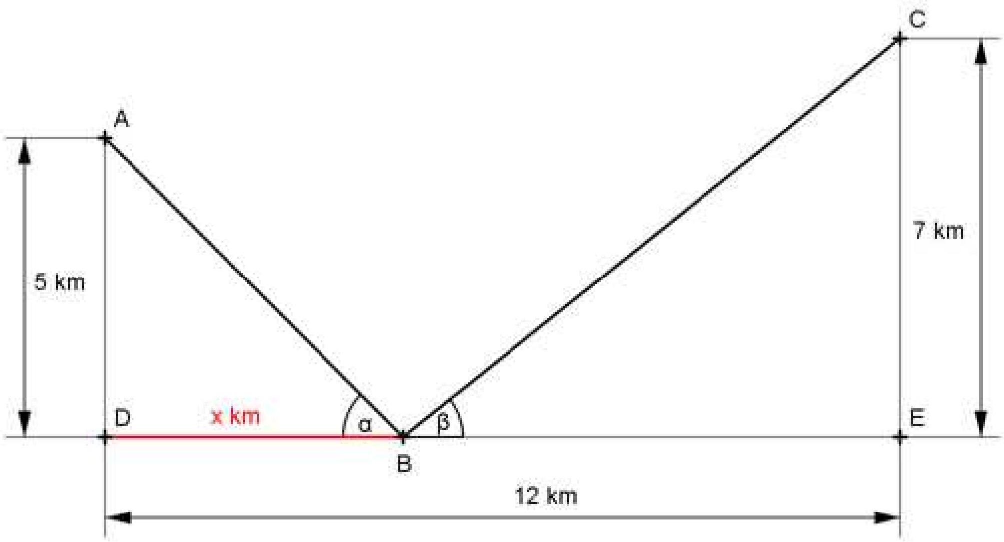
Extrem Aufgabe 214

Zwischen D und E verläuft eine Bahnstrecke. Die Orte A und C sollen an diese Bahnlinie angebunden werden. Wie weit von D entfernt soll der zukünftige Bahnhof B liegen, wenn die Strecke ABC am kürzesten sein soll?



Zielfunktion:

$l = AB + BC$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ADB:

$DB = x$ km

$AB^2 = 5^2 + x^2 \quad |\sqrt{}$

$AB = \sqrt{25 + x^2}$

Satz von Pythagoras im Dreieck BEC:

$BE = 12 - x$ km

$BC^2 = 7^2 + (12 - x)^2$

$BC^2 = 49 + 144 - 24x + x^2 \quad |\sqrt{}$

$BC = \sqrt{x^2 - 24x + 193}$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$l_{(x)} = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{x^2 - 24x + 193} \qquad 0 < x < 12 \text{ km}$$

$$l'_{(x)} = \frac{1}{2} * \frac{2x}{\sqrt{25 + x^2}} + \frac{1}{2} * \frac{2x - 24}{\sqrt{x^2 - 24x + 193}}$$

$$l'_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{25 + x^2}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 193}}$$

$$l'_{(x)} = \frac{x * \sqrt{x^2 - 24x + 193} + (x - 12) * \sqrt{25 + x^2}}{\sqrt{25 + x^2} * \sqrt{x^2 - 24x + 193}}$$

$$\frac{x * \sqrt{x^2 - 24x + 193} + (x - 12) * \sqrt{25 + x^2}}{\sqrt{25 + x^2} * \sqrt{x^2 - 24x + 193}} = 0 \,|* \sqrt{25 + x^2} * \sqrt{x^2 - 24x + 193}$$

$$x * \sqrt{x^2 - 24x + 193} + (x - 12) * \sqrt{25 + x^2} = 0 \mid -(x - 12) * \sqrt{25 + x^2}$$

$$x * \sqrt{x^2 - 24x + 193} = -(x - 12) * \sqrt{25 + x^2} \mid^2$$

$$x^2 * (x^2 - 24x + 193) = (x^2 - 24x + 144) * (25 + x^2)$$

$$x^4 - 24x^3 + 193x^2 = 25x^2 + x^4 - 600x - 24x^3 + 3\,600 + 144x^2 \mid -x^4 + 24x^3$$

$$193x^2 = 169x^2 - 600x + 3\,600 \mid -169x^2 + 600x - 3\,600$$

$$24x^2 + 600x - 3\,600 = 0$$

A, B, C - Formel

$A = 24$; $B = 600$; $C = -3\,600$

$$x_{1,2} = \frac{-600 \pm \sqrt{600^2 - 4 * 24 * (-3\,600)}}{2 * 24}$$

$$x_{1,2} = \frac{-600 \pm 840}{48}$$

$$x_1 = \frac{-1\,440}{48} = -30 \text{ km} \text{ --> keine Lösung}$$

$$x_2 = \frac{240}{48} = \mathbf{5 \text{ km}}$$

Zur Beurteilung, ob $l''_{(x)} >$ oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u_1 = x$, $u_1' = 1$, $u_2 = x - 12$, $u_2' = 1$

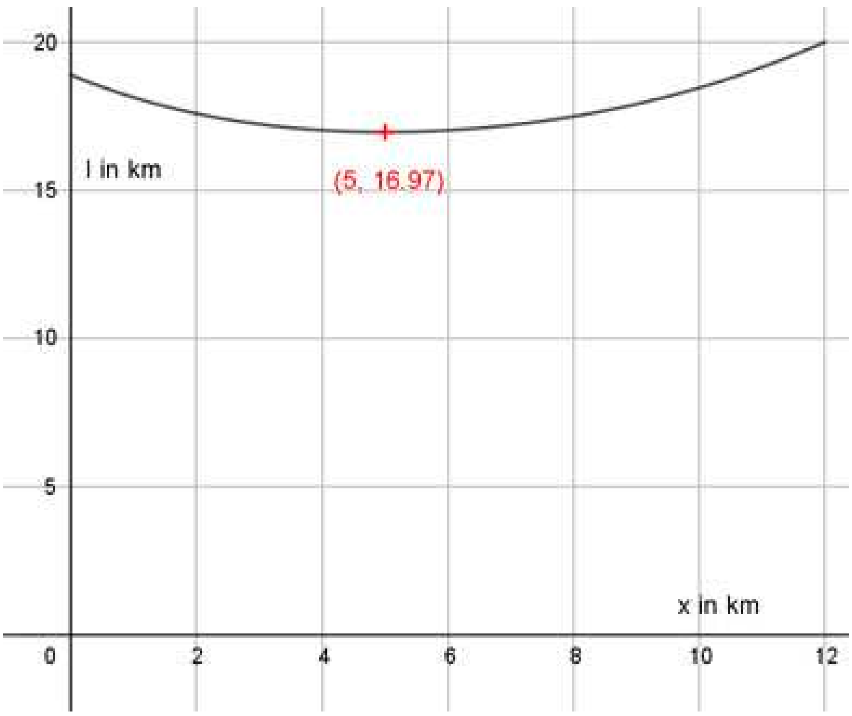
$$l''_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{25 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 24x + 193}}$$

$$l''_{(5)} = \frac{1}{\sqrt{25 + 5^2}} + \frac{1}{\sqrt{5^2 - 24*5 + 193}} = > 0 \text{ --> Minimum}$$

$l_{(5)} = \sqrt{25 + 5^2} + \sqrt{5^2 - 24*5 + 193} = 16{,}97$ km absolutes Minimum, weil

$l_{(0)} = \sqrt{25 + 0^2} + \sqrt{0^2 - 24*0 + 193} = 18{,}89 \text{ km} > 16{,}97$ km

$l_{(12)} = \sqrt{25 + 12^2} + \sqrt{12^2 - 24*12 + 193} = 20 \text{ km} > 16{,}97$ km



Alternativrechnung:

$$l'_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{25 + x^2}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 193}}$$

$$l'_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{25 + x^2}} - \frac{12 - x}{\sqrt{x^2 - 24x + 193}}$$

$$l'_{(x)} = \frac{DB}{AB} - \frac{BE}{BC} = \cos \alpha - \cos \beta$$

$\cos \alpha - \cos \beta = 0 \mid +\cos \beta$

$\cos \alpha = \cos \beta$ --> $\alpha = \beta$ -->

die Dreiecke ADB und BEC stimmen in allen Winkeln überein --> sie sind ähnlich -->

$$\frac{x}{5} = \frac{12 - x}{7}$$

Über Kreuz multipliziert:

$7x = 60 - 5x \mid +5x$

$12x = 60 < :12$

$x = 5$ km