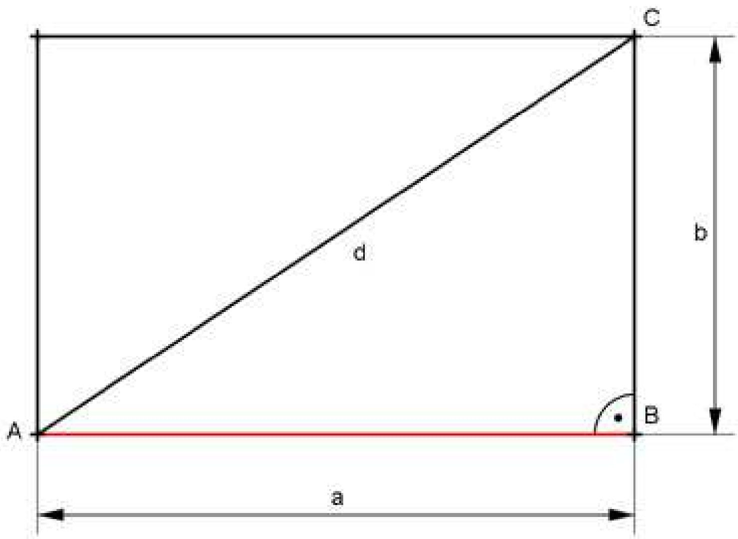
Extrem Aufgabe 23

Es gibt viele Rechtecke, deren Diagonale d gleich lang ist. Welche Seitenlänge a hat das mit dem größten Flächeninhalt A?



Zielfunktion:

$A = a * b$

Nebenbedingung: $0 < a < d$

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$d^2 = a^2 + b^2 \mid -a^2$

$b^2 = d^2 - a^2$

$A^2 = a^2 * b^2$

In das Quadrat der Zielfunktion eingesetzt:

$A^2{}_{(a)} = a^2 * (d^2 - a^2) = d^2 * a^2 - a^4$

$A^2{}'_{(a)} = 2 * a * d^2 - 4 * a^3$

$2 * a * d^2 - 4 * a^3 = 0$

$2a * (d^2 - 2a^2) = 0$

$d^2 - 2a^2 = 0 \mid +2a^2$

$2a^2 = d^2 \mid :2$

$$a^2 = \frac{d^2}{2} \mid \sqrt{}$$

$$\color{red}{\mathbf{a} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{2}} \mathbf{* \sqrt{2}}}$$

$$b^2 = d^2 - \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2} \mid\sqrt{}$$

$$b = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2} * \sqrt{2} = a$$ --> Das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat.

$$A''_{(a)}{}^2 = 2 * d^2 - 12 * a^2$$

$$A''_{(d/2 * \sqrt{2})} = 2 * d^2 - 12 * \frac{d^2}{2} = - 6 * d^2 < 0$$ --> Maximum

$$A_{(a)}{}^2 = d^2 * \left(\frac{d}{2} * \sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} * \sqrt{2}\right)^4 = \frac{d^4}{2} - \frac{d^4}{4} = \frac{d^4}{4} \mid\sqrt{}$$

$$A_{(a)} = \frac{d^2}{2}$$

--> absolutes Maximum, weil

$$A^2_{(0)} = d^2 * 0^2 - 0^4 = 0 < A^2_{(a)}$$

$$A^2_{(d)} = d^2 * d^2 - d^4 = 0 < A^2_{(a)}$$