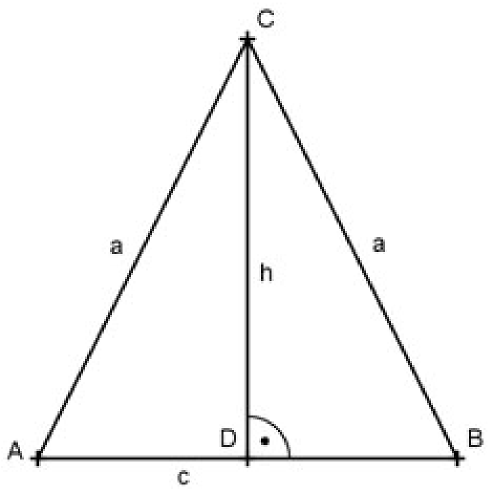
Extrem Aufgabe 25

Wie groß ist ein Schenkel a eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Flächeninhalt A bei gegebenem Umfang U am größten ist?



Zielfunktion:

$$A = \frac{c \cdot h}{2}$$

Nebenbedingung: $0 < c < U/2$

$U = c + 2 \cdot a \mid -c$

$U - c = 2a \mid :2$

$$a = \frac{U - c}{2}$$

$$a^2 = \frac{U^2 - 2Uc + c^2}{4}$$

Satz von Pythagoras im Dreieck ADC:

$a^2 = h^2 + (c/2)^2 \mid -(c/2)^2$

$$\frac{U^2 - 2Uc + c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = h^2$$

$$h^2 = \frac{U^2 - 2Uc}{4} = \frac{1}{4} * (U^2 - 2Uc) \quad |\sqrt{\ }$$

$$h = \frac{1}{2} * \sqrt{U^2 - 2Uc}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A_{(c)} = \frac{1}{2} * \frac{c * \sqrt{U^2 - 2Uc}}{2} = \frac{1}{4} * \sqrt{c^2U^2 - 2Uc^3}$$

Zu untersuchende Funktion:

$$A_{(c)} = \sqrt{c^2U^2 - 2Uc^3}$$

Kettenregel:

$$A'_{(c)} = \frac{1}{2} * \frac{2cU^2 - 6Uc^2}{c * \sqrt{U^2 - 2Uc}}$$

$$A'_{(c)} = \frac{U^2 - 3Uc}{\sqrt{U^2 - 2Uc}}$$

$$\frac{U^2 - 3Uc}{\sqrt{U^2 - 2Uc}} = 0 \quad | * \sqrt{U^2 - 2Uc}$$

$$U^2 - 3Uc = 0 \quad | +3Uc$$

$$3Uc = U^2 \quad | :3U$$

$$c = \frac{U}{3}$$

$$\mathbf{a =} \frac{U - U/3}{2} = \frac{(2/3) * U}{2} = \mathbf{\frac{U}{3}}$$

$$h = \frac{1}{2} * \sqrt{U^2 - 2U * U/3}$$

$$h = \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{U^2}{3}}$$

$$h = \frac{U * \sqrt{3}}{6}$$

Zur Beurteilung, ob $A''_{(c)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u' = - 3U$

$$A''_{(c)} = \frac{- 3U}{\sqrt{U^2 - 2Uc}}$$

$$A''_{(u/3)} = \frac{- 3U}{\sqrt{U^2 - 2Uc}} = \frac{- 3U}{\sqrt{U^2 - 2U * U/3}} = \frac{- 3U}{\sqrt{\frac{U^2}{3}}} = \frac{< 0}{> 0} = < 0 \text{ -->}$$

Maximum

$$A_{(U/3)} = \frac{U/3 * U * \sqrt{3}}{2 * 6} = \frac{U^2 * \sqrt{3}}{36}$$ absolutes Maximum, weil

$$A_{(0)} = \frac{1}{4} * 0 * \sqrt{U^2 - 2U * 0} = 0 < \frac{U^2 * \sqrt{3}}{36}$$

$$A_{(U/2)} = \frac{1}{4} * \frac{U}{2} * \sqrt{U^2 - 2U * U/2} = 0 < \frac{U^2 * \sqrt{3}}{36}$$