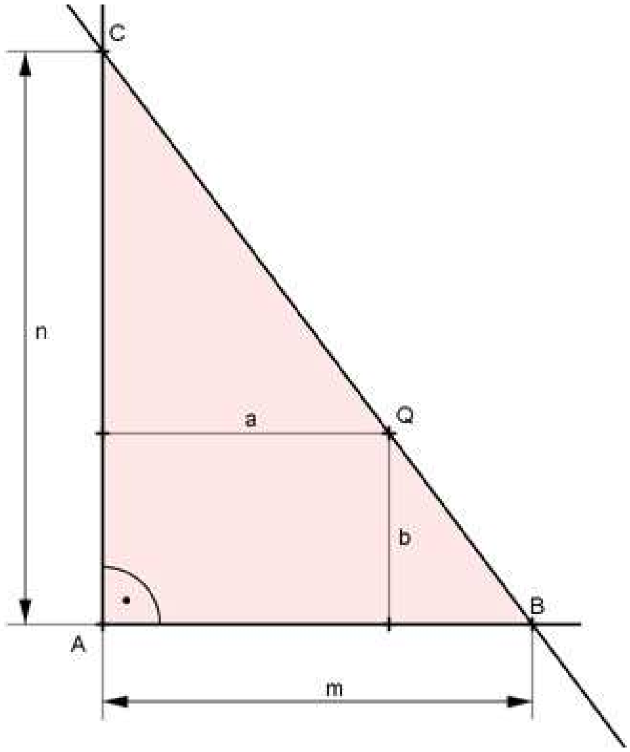
Extrem Aufgabe 51

Die Gerade durch den Punkt Q soll so verlaufen, dass der Flächeninhalt des abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecks ABC minimal wird?
Wie lang ist dann der Achsenabschnitt m?



Zielfunktion:

$$A = \frac{m * n}{2} \qquad a < m < \infty$$

Nebenbedingung:

Strahlensatz:

$$\frac{a}{m} = \frac{n - b}{n}$$

Über Kreuz multipliziert:

$n * a = m * (n - b) = m * n - m * b| - m * n$

$na - mn = - mb \mid *(-1)$

$n * (m - a) = mb \mid :(m -a)$

$$n = \frac{mb}{m - a}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A_{(m)} = \frac{\frac{m * mb}{m - a}}{2} = \frac{m^2b}{2 * (m - a)} = \frac{m^2b}{2} * (m - a)^{-1}$$

Produktregel:

$u' = 2mb$

$$v' = \frac{- 1}{(m - a)^2}$$

$$A'_{(m)} = 2mb * (m - a)^{-1} + \frac{- m^2b}{(m - a)^2}$$

$$A'_{(m)} = \frac{2mb * (m - a) - m^2b}{(m - a)^2} = \frac{2m^2b - 2mab - m^2b}{(m - a)^2}$$

$$A'_{(m)} = \frac{m^2b - 2mab}{(m - a)^2} = 0 \mid *(m - a)^2$$

$m^2b - 2mba = 0 \mid :b$

$m * (m - 2a) = 0 \mid +2a$

$m_1 = 0$ --> keine Lösung

$m_2 = 2a$

Zur Beurteilung, ob $A''_{(m)}$ > oder < 0 : (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u = m^2b - 2mab$

$$A''_{(m)} = \frac{u'}{v} = \frac{2mb - 2ab}{(m - a)^2}$$

$$A''_{(2a)} = \frac{4ab - 2ab}{(2a - a)^2} = \frac{2ab}{a^2} = \frac{2b}{a} > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$A_{(2a)} = \frac{(2a)^2 * b}{2 * (2a - a)} = \frac{4a^2b}{2a} = 2ab \text{ absolutes Minimum, weil}$$

$$A_{(a)} = \frac{a^2 * b}{2 * (a - a)} \text{ --> } \infty > 2ab$$

$$A_{(\infty)} = \frac{\infty^2 * b}{2 * (\infty - a)} \text{ --> } \infty > 2ab$$