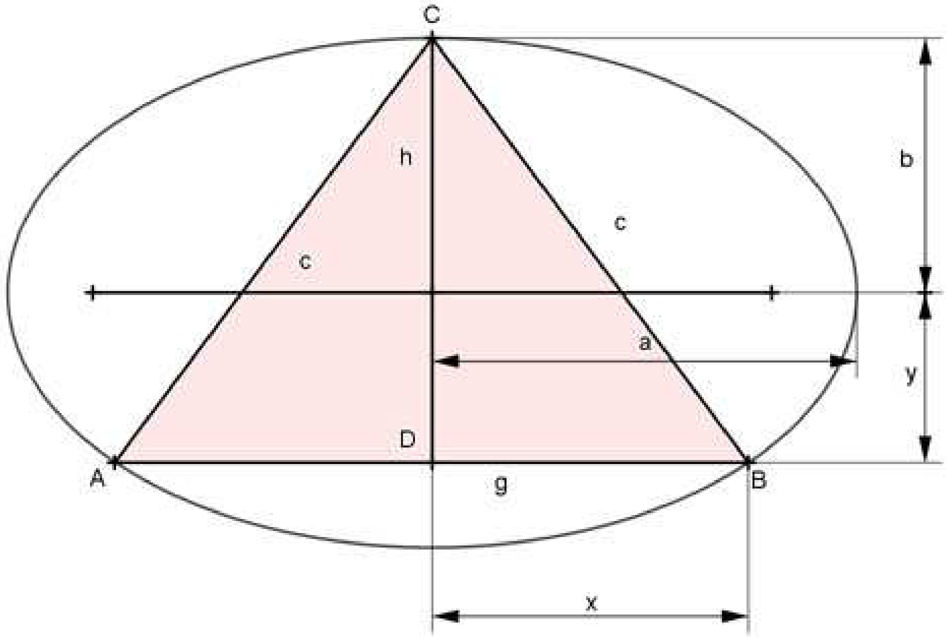
Extrem Aufgabe 61

Der Ellipse mit gegebenem a und b soll ein größtmögliches gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben werden? Wie groß ist g?



Zielfunktion:

$$g = 2 * x$$

$$A = \frac{2 * x * (b + y)}{2} = x * (b + y) \qquad 0 < x < a$$

Nebenbedingung:

Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2b^2 + y^2a^2}{a^2b^2} = 1 \mid *a^2b^2$$

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2 \mid -x^2b^2$$

$$y^2a^2 = a^2b^2 - x^2b^2 \mid :a^2$$

$$y^2 = \frac{b^2 \cdot (a^2 - x^2)}{a^2} \quad |\sqrt{\ }$$

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A_{(x)} = x \cdot \left(b + \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right)$$

Produktregel:

$$u' = 1$$

$$v' = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$A'_{(x)} = 1 \cdot \left(b + \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right) - \frac{b}{a} \cdot \frac{x \cdot x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$A'_{(x)} = \frac{ab \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + b \cdot (a^2 - x^2) - bx^2}{a \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\frac{ab \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + b \cdot (a^2 - x^2) - bx^2}{a \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \quad |\cdot a \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$ab \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + ba^2 - 2bx^2 = 0 \quad |: b$$

$$a \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - 2x^2 = 0 \quad | +2x^2 - a^2$$

$$a \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = 2x^2 - a^2 \quad |^2$$

$$a^2 \cdot (a^2 - x^2) = 4x^4 - 4x^2a^2 + a^4$$

$$a^4 - a^2x^2 = 4x^4 - 4x^2a^2 + a^4 \quad |-a^4 + a^2x^2$$

$$4x^4 - 3a^2x^2 = 0$$

$x^2 * (4x^2 - 3a^2) = 0 \mid +3a^2$

$x^2 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 0$ keine Lösung

$4x^2 - 3a^2 = 0 \mid +3a^2$

$4x^2 = 3a^2 \mid \sqrt{}$

$2x =$ **$g = a * \sqrt{3}$**

$$y = \frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - (\tfrac{a}{2} * \sqrt{3})^2} = \frac{b}{2} * \sqrt{3}$$

Zur Beurteilung, ob $A''_{(x)}$ > oder < 0 : (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$$u = ab * \sqrt{a^2 - x^2} + b * (a^2 - x^2) - bx^2,\ u' = \frac{1}{2} * ab * \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 4bx$$

$$A''_{(a/2 * \sqrt{3})} = \frac{u'}{v} = \frac{-ab * a/2 * \sqrt{3}}{\sqrt{a^2 - (\tfrac{a}{2} * \sqrt{3})^2}} - 4b * a/2 * \sqrt{3}$$

$$A''_{(a/2 * \sqrt{3})} = \frac{-a^2 b * \sqrt{3}}{2 * a/2} - 2ab * \sqrt{3}$$

$$A''_{(a/2 * \sqrt{3})} = -ab * \sqrt{3} - 2ab * \sqrt{3} = -3ab * \sqrt{3} < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

$$A_{(a/2 * \sqrt{3})} = \frac{a}{2} * \sqrt{3} * (b + \frac{b}{2} * \sqrt{3})$$

$$A_{(a/2 * \sqrt{3})} = \frac{ab}{2} * \sqrt{3} + \frac{ab}{4} * \sqrt{3} = \frac{3}{4} * ab * \sqrt{3}$$ absolutes Maximum, weil

$$A_{(0)} = 0 * (b + \frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - 0^2}) = 0 < \frac{3}{4} * ab * \sqrt{3}$$

$$A_{(a)} = a * \left(b + \frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - a^2}\right) = ab < \frac{3}{4} * ab * v3$$