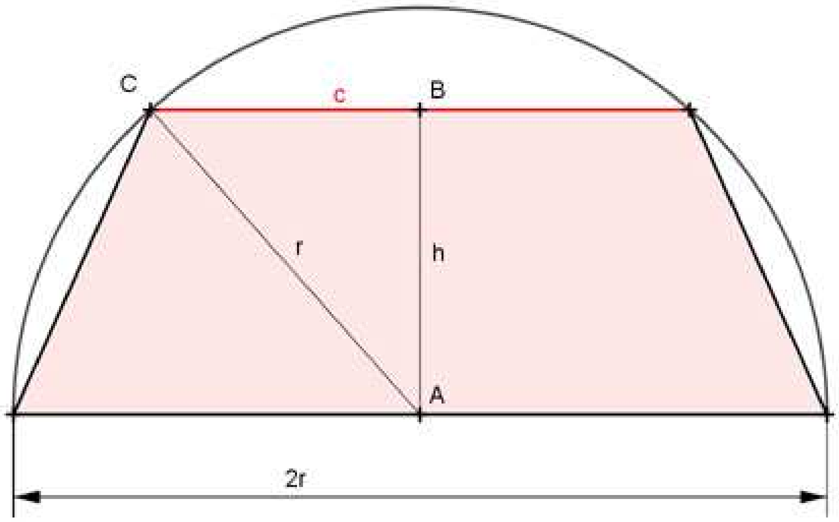
Extrem Aufgabe 65

Wie lang ist die parallele Seite c des in den Halbkreis mit dem Radius r eingefügten gleichschenkligen Trapezes, wenn dessen Fläche A maximal sein soll?



Zielfunktion:

$$A = \frac{2r + c}{2} * h \qquad 0 < c < 2r$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$r^2 = h^2 + (c/2)^2 \mid -(c/2)^2$

$h^2 = r^2 - (c/2)^2$

In die quadrierte Zielfunktion eingesetzt:

$$A^2{}_{(c)} = \frac{(2r + c)^2 * (r^2 - (c/2)^2)}{4} = \frac{(4r^2 + 4cr + c^2) \; *(r^2 - c^2/4)}{4}$$

$$A^2{}_{(c)} = \frac{4r^4 - r^2c^2 + 4cr^3 - c^3r + c^2r^2 - c^4/4}{4}$$

$$A^2{}_{(c)} = \frac{16r^4 + 16cr^3 - 4c^3r - c^4}{16}$$

$$A^{2\prime}_{(c)} = \frac{16r^3 - 12rc^2 - 4c^3}{16}$$

$$\frac{16r^3 - 12rc^2 - 4c^3}{16} = 0 \mid *16$$

$$16r^3 - 12rc^2 - 4c^3 = 0$$

Durch Probieren gefunden: **$c = r$**

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\quad - 4c^3 - 12rc^2 + 16r^3 : (c - r) = - 4c^2 - 16cr - 16r^2 \\
- (- 4c^3 + 4c^2r) \\
\hline
\qquad\quad - 16c^2r + 16r^3 \\
\qquad\quad -(- 16c^2 + 16cr^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad - 16cr^2 + 16r^3 \\
\qquad\qquad\qquad - (- 16cr^2 + 16r^3) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$- 4c^2 - 16cr - 16r^2 = 0 \mid *(-1)$$

$$4c^2 + 16cr + 16r^2 = 0 \mid :4$$

$$c^2 + 4cr + 4r^2 = 0$$

$$p = 4r \; ; \; q = 4r^2$$

$$c_{2,3} = \frac{-4r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4r}{2}\right)^2 - 4r^2}$$

$c_{2,3} = - 2r$ keine weitere Lösung

$$A^{2\prime\prime}_{(c)} = \frac{- 24rc - 12c^2}{16}$$

$$A^{2\prime\prime}_{(r)} = \frac{- 24r^2 - 12r^2}{16} < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$A^2_{(r)} = \frac{16r^4 + 16r * r^3 - 4r^3 * r - r^4}{16} = \frac{27}{16} * r^4 \quad |\sqrt{\ }$$

$A_{(r)} = 1{,}3 * r^2$ absolutes Maximum, weil

$$A^2_{(0)} = \frac{16r^4 + 16 * 0^3 - 4r^3 * 0 - 0^4}{16} = r^4 \quad |\sqrt{\ }$$

$A_{(0)} = r^2 < 1{,}3 * r^2$

$$A^2_{(2r)} = \frac{16r^4 + 16 * 2r * r^3 - 4 * (2r)^3 * r - (2r)^4}{16}$$

$$A^2_{(2r)} = \frac{16r^4 + 32r^4 - 32r^4 - 16r^4}{16} = 0 < 1{,}3 * r^2$$