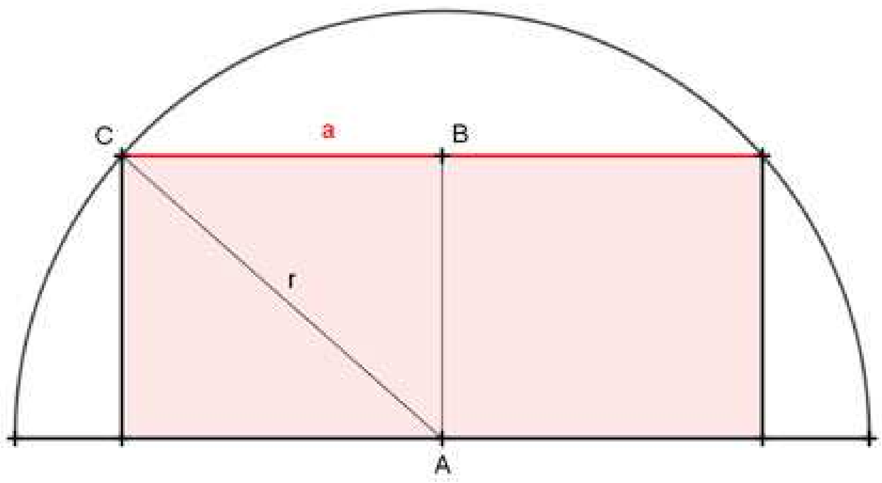
Extrem Aufgabe 67

Wie lang ist die Seite a des in den Halbkreis mit dem Radius r einbeschriebenen Rechtecks, wenn dessen Umfang U maximal sein soll?



Zielfunktion:

$U = 2a + 2b \qquad 0 < a < 2r$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$r^2 = b^2 + (a/2)^2 \mid -(a/2)^2$

$b^2 = r^2 - (a/2)^2 \mid \sqrt{\ }$

$b = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$U_{(a)} = 2a + 2 * \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$

Summen- und Kettenregel:

$$U'_{(a)} = 2 + 2 * \frac{1}{2} * \frac{-2a/4}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

$$U'_{(a)} = 2 + \frac{-a}{2 * \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

$$2 + \frac{-a}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = 0 \quad |* 2 \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$4 * \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} - a = 0 \quad | +a$$

$$4 * \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = a \quad |^2$$

$$16 * \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = a^2$$

$$16r^2 - 4a^2 = a^2 \quad | + 4a^2$$

$$16r^2 = 5a^2 \quad |:5$$

$$a^2 = \frac{16}{5} * r^2 \quad |\sqrt{}$$

$$\color{red}{\mathbf{a =}} \frac{4 * r}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} * r * \sqrt{5} = \color{red}{\mathbf{0{,}8 * r * \sqrt{5}}}$$

$$b = \sqrt{r^2 - \frac{3{,}2}{4} * r^2} = r * \sqrt{0{,}2}$$

$$b = 0{,}2 * r * \sqrt{5}$$

Zur Beurteilung, ob $U''_{(a)} > \text{oder} < 0$: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u = -a, \; u' = -1$

$$U''_{(a)} = \frac{u'}{v} = \frac{-1}{2 * \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

$$U''_{(0,8 * r * \sqrt{5})} = \frac{-1}{2 * \sqrt{r^2 - 0,8r^2}} = \frac{-1}{2r * \sqrt{0,2}} < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$U_{(0,8 * r * \sqrt{5})} = 2 * 0,8 * r * \sqrt{5} + 2 * 0,2 * r * \sqrt{5} = 2 * r * \sqrt{5}$$

absolutes Maximum, weil

$$U_{(0)} = 2 * 0 + 2 * \sqrt{r^2 - \frac{0^2}{4}} = 2 * r < 2 * r * \sqrt{5}$$

$$U_{(2r)} = 2 * 2r + 2 * \sqrt{r^2 - \frac{(2r)^2}{4}} = 4r + 0 < 2 * r * \sqrt{5}$$