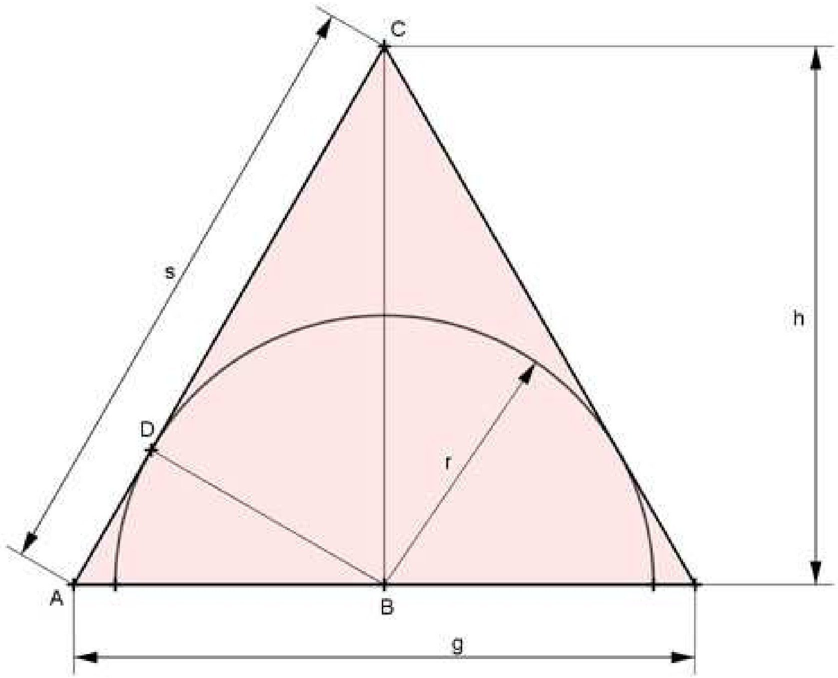
Extrem Aufgabe 71

Dem Halbkreis mit dem Radius r ist das gleichschenklige Dreieck so umschrieben, dass sein Flächeninhalt A minimal wird. Wie groß ist seine Höhe h?



Zielfunktion:

$$A = \frac{g * h}{2} \qquad r < h < \infty$$

$$A^2 = \frac{g^2 * h^2}{4}$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$s^2 = h^2 + (g/2)^2 \mid -h^2$

$$s^2 - h^2 = \frac{g^2}{4} \mid *4$$

$g^2 = 4 * (s^2 - h^2)$

Die Dreiecke ABC und DBC sind ähnlich, deswegen:

$$\frac{s}{h} = \frac{g/2}{r} \quad | \cdot h$$

$$s = \frac{g * h}{2 * r}$$

$$s^2 = \frac{g^2 * h^2}{4 * r^2}$$

$$g^2 = 4 * \left(\frac{g^2h^2}{4r^2} - h^2\right)$$

$$g^2 = \frac{g^2h^2 - 4h^2r^2}{r^2} \quad | *r^2$$

$$g^2r^2 = g^2h^2 - 4h^2r^2 \quad |+4h^2r^2 - g^2r^2$$

$$4h^2r^2 = g^2 * (h^2 - r^2) \quad | :(h^2 - r^2)$$

$$g^2 = \frac{4h^2r^2}{h^2 - r^2}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$A^2_{(h)} = \frac{4h^2r^2 * h^2}{4 * (h^2 - r^2)} = \frac{h^4r^2}{h^2 - r^2}$$

Quotientenregel:

$u' = 4h^3r^2$

$v' = 2h$

$$A^{2\prime}_{(h)} = \frac{4h^3r^2 * (h^2 - r^2) - 2h * h^4r^2}{(h^2 - r^2)^2}$$

$$A^{2\prime}_{(h)} = \frac{4h^5r^2 - 4h^3r^4 - 2h^5r^2}{(h^2 - r^2)^2} = \frac{2h^5r^2 - 4h^3r^4}{(h^2 - r^2)^2}$$

$$\frac{2h^5r^2 - 4h^3r^4}{(h^2 - r^2)^2} = 0 \quad |*(h^2 - r^2)^2$$

$2h^3r^2 * (h^2 - 2r^2) = 0$

$2h^3r^2 = 0 \quad |:2r^2$

$h^3 = 0$ --> $h = 0$ keine Lösung

$h^2 - 2r^2 = 0 \quad |+2r^2$

$h^2 = 2r^2 \quad |\sqrt{}$

$h = r * \sqrt{2}$

$$g^2 = \frac{4 * (r * \sqrt{2})^2 * r^2}{(r * \sqrt{2})^2 - r^2} = \frac{8r^4}{r^2} = 8r^2$$

$g = 2r * \sqrt{2}$

Zur Beurteilung, ob $A^2''_{(h)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u = 2h^5r^2 - 4h^3r^4$, $u' = 10h^4r^2 - 12h^2r^4$

$$A^2''_{(h)} = \frac{u'}{v} = \frac{10h^4r^2 - 12h^2r^4}{(h^2 - r^2)^2}$$

$$A^2''_{(r * \sqrt{2})} = \frac{40r^6 - 24r^6}{r^4} = 16r^2 > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$A_{(r * \sqrt{2})} = \frac{2r * \sqrt{2} * r * \sqrt{2}}{4} = r^2 \text{ absolutes Minimum, weil}$$

$$A^2_{(r)} = \frac{4 * 2r^2 * r^2 * 2r^2}{4 * (2r^2 - r^2)} = 4r^4 \quad |\sqrt{}$$

$A_{(r)} = 2r^2 > r^2$

$$A^2_{(\infty)} = \frac{4 * 2 * \infty^2 * 2 * \infty^2}{4 * (2 * \infty^2 - r^2)} \text{ -->} \infty^2 > r^2$$