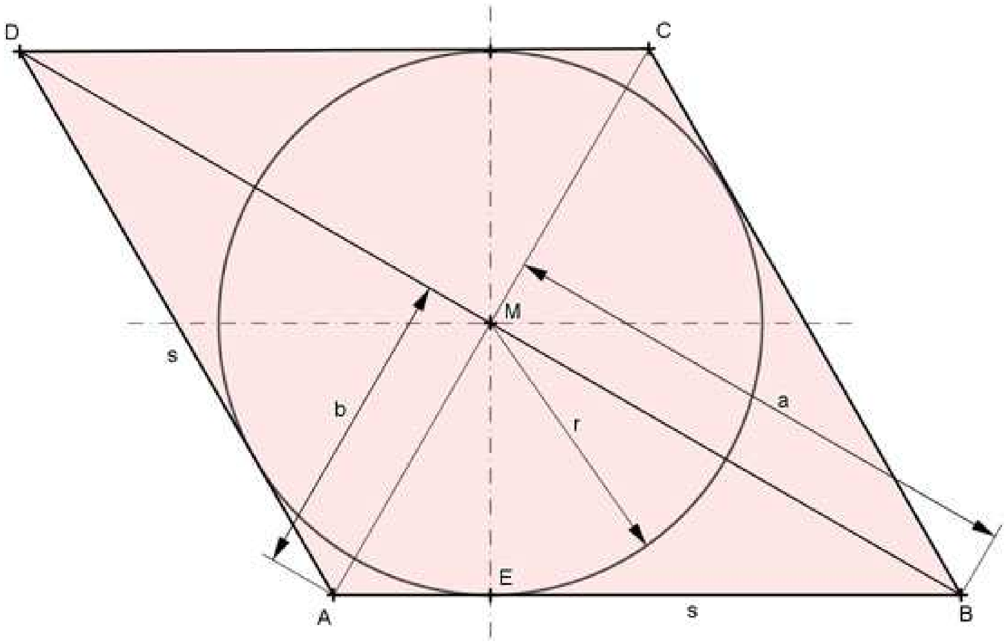
Extrem Aufgabe 73

Die Raute umschreibt einen Kreis mit dem Radius r. Wie groß ist eine Seite s der Raute, wenn ihr Flächeninhalt A minimal sein soll?



Zielfunktion:

2 * Dreieck ABD = 4 * Dreieck ABM

$$A = 2 * \frac{2a * b}{2} = 2ab \text{ oder } 4 * \frac{s * r}{2} = 2sr \text{ -->}$$

$2ab = 2sr$ |:2r

$$s = \frac{ab}{r}$$

$$s^2 = \frac{a^2b^2}{r^2}$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ABM:

$s^2 = a^2 + b^2$ |$-b^2$

$a^2 = s^2 - b^2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$s^2 = \frac{(s^2 - b^2)b^2}{r^2} \quad |*r^2$$

$$s^2 * r^2 = s^2 * b^2 - b^4 \quad |+b^4 - s^2r^2$$

$$b^4 = s^2(b^2 - r^2)$$

$$s^2_{(b)} = \frac{b^4}{b^2 - r^2} \qquad\qquad r < b < \infty$$

Quotientenregel:

$$u' = 4b^3$$

$$v' = 2b$$

$$s^{2\prime}_{(b)} = \frac{4b^3 * (b^2 - r^2) - 2b * b^4}{(b^2 - r^2)^2} = \frac{2b^5 - 4b^3r^2}{(b^2 - r^2)^2}$$

$$\frac{2b^5 - 4b^3r^2}{(b^2 - r^2)^2} = 0 \quad |*(b^2 - r^2)^2$$

$$2b^3 * (b^2 - 2r^2) = 0$$

$$2b^3 = 0 \quad | :2$$

$b^3 = 0 \dashrightarrow b = 0$ keine Lösung

$$b^2 - 2r^2 = 0 \quad |+2r^2$$

$$b^2 = 2r^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$b = r * \sqrt{2}$$

$$s^2 = \frac{(r * \sqrt{2})^4}{(r * \sqrt{2})^2 - r^2} = \frac{r^4 * 4}{r^2} = 4 * r^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\mathbf{s = 2r}$$

Zur Beurteilung, ob $s^{2\prime\prime}_{(b)}$ > oder < 0: (Begründung siehe

Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$u = 2b^5 - 4b^3r^2$, $u' = 10b^4 - 12b^2r^2$

$$s^{2''}_{(b)} = \frac{u'}{v} = \frac{10b^4 - 12b^2r^2}{(b^2 - r^2)^2}$$

$$s^{2''}_{(r * v2)} = \frac{40r^4 - 24r^4}{r^4} = 16 > 0 \text{ --> Minimum}$$

$$s^2_{(r * v2)} = \frac{(r * v2)^4}{(r * v2)^2 - r^2} = 4r^2 \text{ absolutes Minimum, weil}$$

$$s^2_{(r)} = \frac{r^4}{r^2 - r^2} \text{ --> } \infty > 4r^2$$

$$s^2_{(\infty)} = \frac{\infty^4}{\infty^2 - r^2} \text{ --> } \infty^2 > 3r^2$$