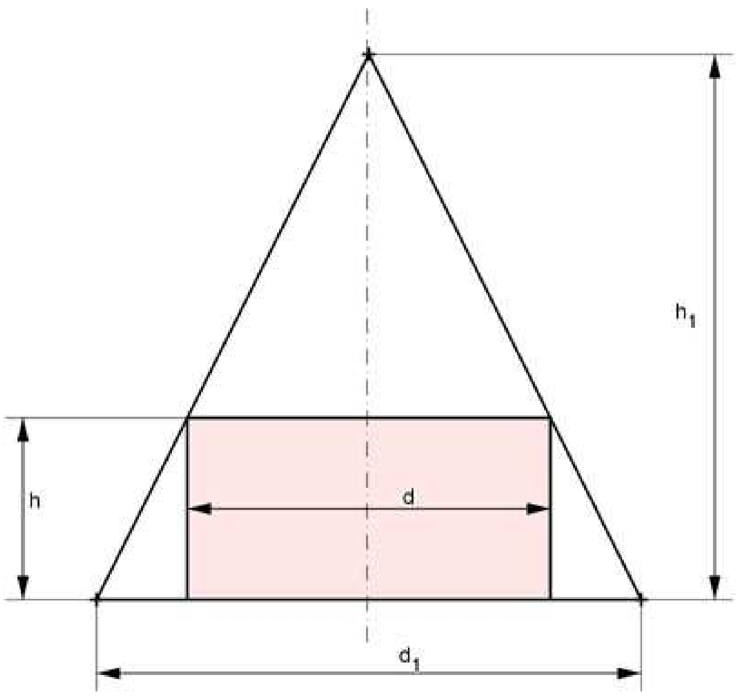
Extrem Aufgabe 75

Welchen Durchmesser d hat ein Zylinder mit maximalem Volumen V, der in den Kegel mit dem Durchmesser $d_1$ und der Höhe $h_1$ eingesetzt werden kann?




Zielfunktion:

$$V = \frac{d^2 * \pi}{4} * h \qquad 0 < d < d_1$$

Nebenbedingung:

Strahlensatz:

$$\frac{d}{d_1} = \frac{h_1 - h}{h_1}$$

Über Kreuz multipliziert:

$d * h_1 = d_1 * (h_1 - h)$

$dh_1 = d_1h_1 - d_1h \mid +d_1h - dh_1$

$d_1h = d_1h_1 - dh_1 \mid :d_1$

$$h = \frac{h_1 * (d_1 - d)}{d_1}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(d)} = \frac{d^2 * \pi}{4} * \frac{h_1 * (d_1 - d)}{d_1} = \frac{\pi * h_1}{4 * d_1} * (d^2 d_1 - d^3)$$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(d)} = d^2 d_1 - d^3$

$V'_{(d)} = 2dd_1 - 3d^2 = d * (2d_1 - 3d)$

$d * (2d_1 - 3d) = 0$

$d = 0$ keine Lösung

$2d_1 - 3d = 0 \mid +3d$

$2d_1 = 3d \mid :3$

$$\mathbf{d = \frac{2}{3} * d_1}$$

$$h = \frac{h1 * (d_1 - (2/3)d_1)}{d_1} = \frac{1}{3} h_1$$

$V''_{(d)} = 2d_1 - 6d$

$$V''_{((2/3)d1)} = 2d_1 - 6 * \frac{2}{3} d_1 = -2d_1 < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$V_{((2/3)d1)} = \frac{((2/3d_1)^2 * \pi}{4} * \frac{1}{3} h_1$$

$$V_{((2/3)d1)} = \frac{d_1^2 * \pi * h_1}{27} \text{ absolutes Maximum, weil}$$

$$V_{(0)} = \frac{0^2 * \pi}{4} * h = 0 < \frac{d_1^2 * \pi * h_1}{27}$$

$$V_{(d1)} = \frac{d_1^2 * \pi}{4} * \frac{h_1 * (d_1 - d_1)}{d_1} = 0 < \frac{d_1^2 * \pi * h_1}{27}$$