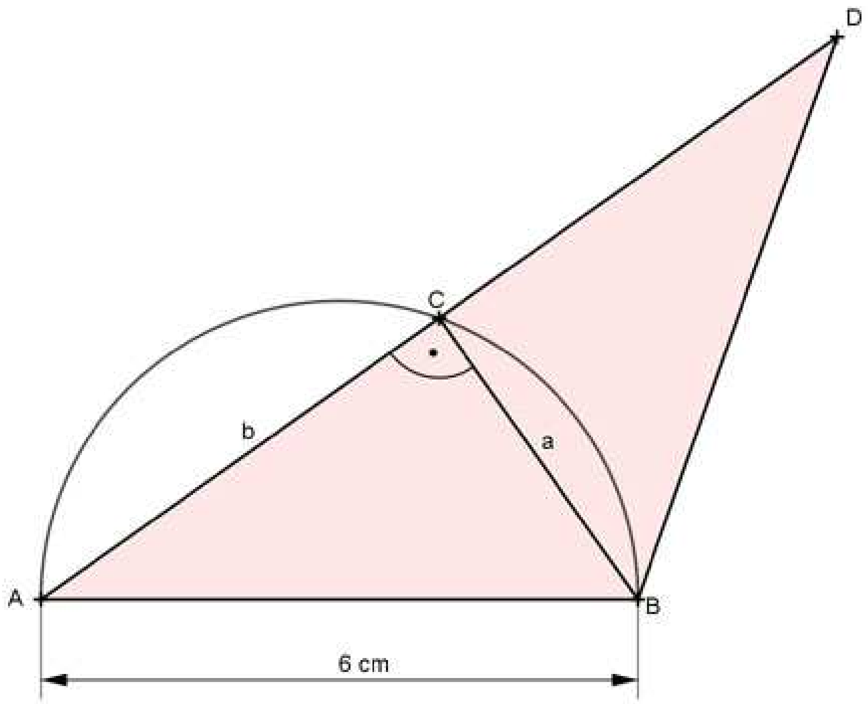
Extrem Aufgabe 83

Das rechtwinklige Dreieck dreht sich um eine Kathete und erzeugt so einen Kegel. Für welches a hat dieser Kegel größtes Volumen V?



Zielfunktion:

$$V = \frac{\pi * b^2 * a}{3}$$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$6^2 = a^2 + b^2 \mid -a^2$

$b^2 = 36 - a^2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(a)} = \frac{\pi * (36 - a^2) * a}{3} = \frac{\pi}{3} * (36a - a^3)$$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(a)} = 36a - a^3$ $\quad\quad 0 < a < 6$

$V'_{(a)} = 36 - 3a^2$

$36 - 3a^2 = 0 \;|+3a^2$

$3a^2 = 36 \;|\; :3$

$a^2 = 12 \;|\sqrt{}$

$a = 3{,}46$ cm

$b^2 = 36 - 12 = 24 \;|\sqrt{}$

$b = 4{,}9$ cm

$V''_{(a)} = -6a < 0$ --> Maximum

$V_{(3,46)} = \dfrac{\pi * 24 * 3{,}46}{3} = 87$ cm³ gerundet, absolutes Maximum, weil

$V_{(0)} = \dfrac{\pi * (36 - 0^2) * 0}{3} = 0 \text{ cm}^3 < 87 \text{ cm}^3$

$V_{(6)} = \dfrac{\pi * (36 - 6^2) * 6}{3} = 0 \text{ cm}^3 < 87 \text{ cm}^3$