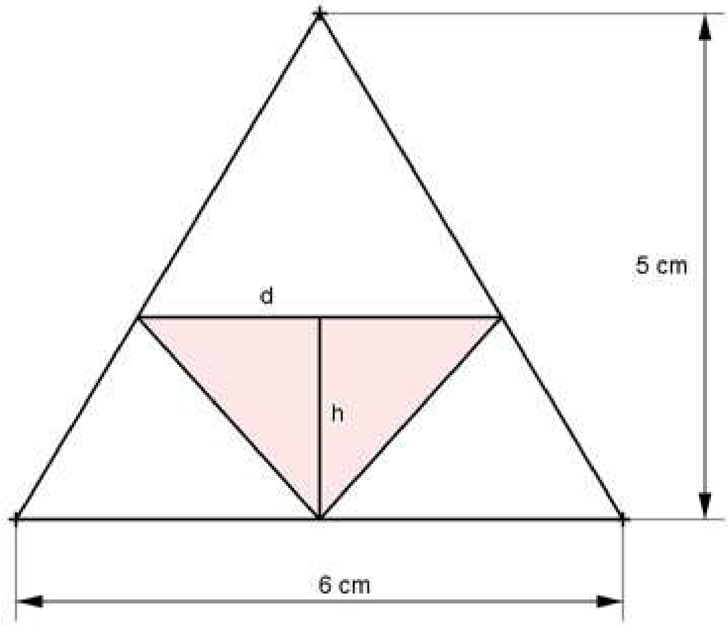
Extrem Aufgabe 85

Dem Kegel wird ein Kegel mit der Spitze mittig nach unten und maximalem Volumen V einbeschrieben. Wie groß ist V?



Zielfunktion:

$$V = \frac{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{12}$$

Nebenbedingung:

Strahlensatz:

$$\frac{d}{6} = \frac{5 - h}{5}$$

Über Kreuz multipliziert:

$5d = 6 * (5 - h)$ |:5

$d = 6 - 1{,}2h$ $\quad\quad 0 < h < 5$

$d^2 = 36 - 14{,}4h + 1{,}44h^2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(h)} = \pi * \frac{36 - 14{,}4h + 1{,}44h^2}{12} * h$$

Zu untersuchende Funktion:

$$V_{(h)} = 36h - 14{,}4h^2 + 1{,}44h^3$$

$$V'_{(h)} = 36 - 28{,}8h + 4{,}32h^2$$

$$4{,}32h^2 - 28{,}8h + 36 = 0$$

A, B, C - Formel

$A = 4{,}32$; $B = -28{,}8$; $C = 36$

$$h_{1,2} = \frac{-(-28{,}8) \pm \sqrt{(-28{,}8)^2 - 4*4{,}32*36}}{2 * 4{,}32}$$

$$h_{1,2} = \frac{28{,}8 \pm 14{,}4}{8{,}64}$$

$$h_1 = \frac{43{,}2}{8{,}64} = 5$$ keine Lösung, nicht im Definitionsbereich

$$h_2 = \frac{14{,}4}{8{,}64} = \frac{5}{3}\ \text{cm} = 1{,}67\ \text{cm}$$

$$d = 6 - 1{,}2 * \frac{5}{3} = 4\ \text{cm}$$

$$V''_{(h)} = -28{,}8 + 8{,}64h$$

$V''_{(5/3)} = -28{,}8 + 8{,}64 * 5/3 = -14{,}4 < 0$ --> Maximum

$$\mathbf{V_{(5/3)} =} \frac{\pi * \left(\frac{4}{2}\right)^2 * \frac{5}{3}\ \text{cm}^3}{3} = \mathbf{7\ cm^3}$$ absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{6 - 1{,}2 \cdot 0}{2}\right)^2 \cdot 0}{3} = 0 \text{ cm}^3 < 7 \text{ cm}^3$$

$$V_{(5)} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{6 - 1{,}2 \cdot 5}{2}\right)^2 \cdot 5}{3} = 0 \text{ cm}^3 < 7 \text{ cm}^3$$