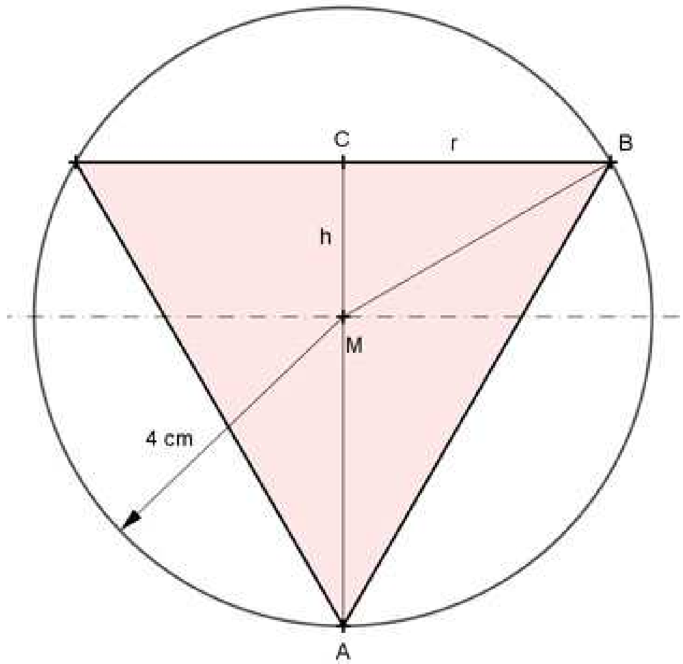
Extrem Aufgabe 87

Wie groß ist die Höhe h des in die Kugel einbeschriebenen Kegels mit maximalem Volumen V und der Spitze nach unten?



Zielfunktion:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Nebenbedingung:

AC = h

BC = r

Satz von Pythagoras im Dreieck MBC:

$4^2 = r^2 + (h - 4)^2 \mid -(h - 4)^2$

$r^2 = 16 - h^2 + 8h + 16$ $\qquad 0 < h < 8$

$r^2 = 8h - h^2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(h)} = \frac{\pi \cdot (8h - h^2) \cdot h}{3}$$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(h)} = 8h^2 - h^3$

$V'_{(h)} = 16h - 3h^2$

$16h - 3h^2 = 0 \mid :h$

$16 - 3h = 0 \mid +3h$

$3h = 16 \mid :3$

$$\mathbf{h =} \frac{16}{3} \text{ cm} = \mathbf{5{,}33\ cm}$$

$$r^2 = \frac{8 * 16}{3} - \left(\frac{16}{3}\right)^2 = \frac{128}{9} \mid \sqrt{\ }$$

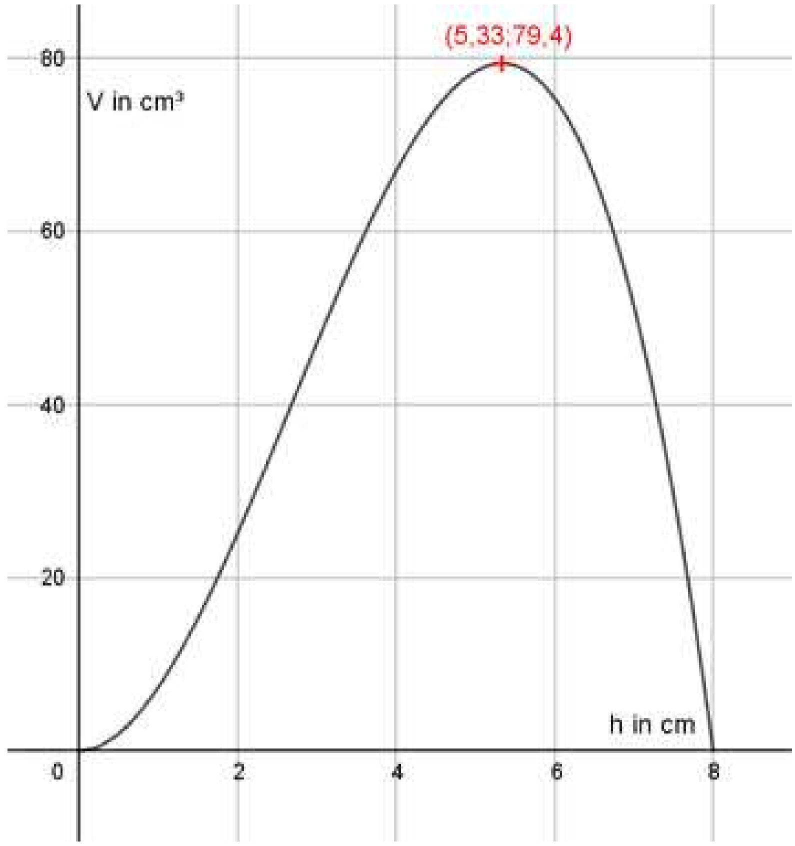
$V''_{(h)} = 16 - 6h$

$V''_{(16/3)} = 16 - 32 = -16 < 0$ --> Maximum

$$V_{(16/3)} = \frac{\pi * \frac{128}{9} * \frac{16}{3} \text{ cm}^3}{3} = 79{,}4 \text{ cm}^3$$ absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = \frac{\pi * (8 * 0 - 0^2) * 0}{3} = 0 \text{ cm}^3 < 79{,}4 \text{ cm}^3$$

$$V_{(8)} = \frac{\pi * (8 * 8 - 8^2) * 8}{3} = 0 \text{ cm}^3 < 79{,}4 \text{ cm}^3$$


(5,33;79,4)
80
V in cm³
60
40
20
h in cm
0
2
4
6
8