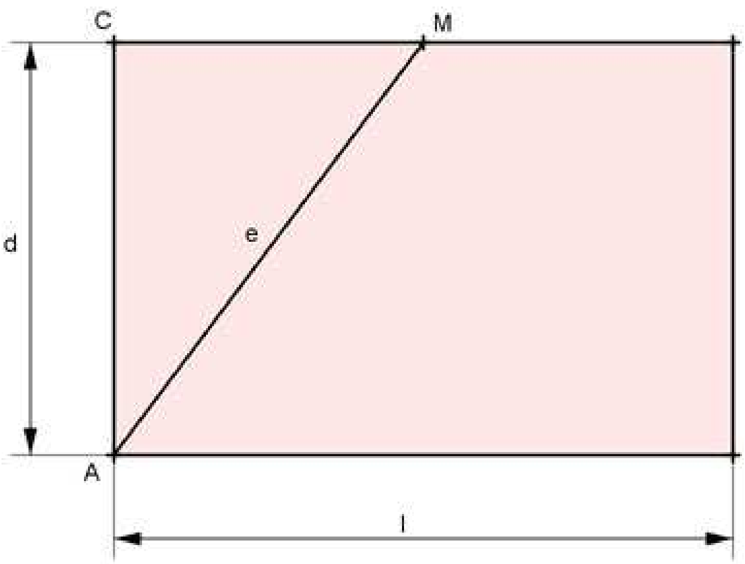
Extrem Aufgabe 89

Wie muss sich der Durchmesser d des Zylinders zu seiner Länge l verhalten, wenn der Abstand e zu der mittigen Öffnung im Zylinder vorgegeben ist und sein Volumen V maximal sein soll?



Zielfunktion:

$V = \pi * r^2 * l$

$d = 2 * r$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck AMC:

$$e^2 = d^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$e^2 = 4r^2 + \frac{l^2}{4} \quad |*4$$

$$4e^2 = 16r^2 + l^2 \quad |-l^2$$

$$4e^2 - l^2 = 16r^2 \quad |:16$$

$$r^2 = \frac{4e^2 - l^2}{16}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(l)} = \pi * \frac{4e^2 - l^2}{16} * l$$

Zu untersuchende Funktion:

$$V_{(l)} = 4e^2l - l^3$$

$$V'_{(l)} = 4e^2 - 3l^2$$

$$4e^2 - 3l^2 = 0 \mid +3l^2$$

$$3l^2 = 4e^2 \mid :3$$

$$l^2 = \frac{4e^2}{3} \mid \sqrt{}$$

$$l = \frac{2e}{\sqrt{3}}$$

$$r^2 = \frac{4e^2 - \frac{4e^2}{3}}{16} = \frac{8e^2}{16 * 3} = \frac{e^2}{6} \mid \sqrt{}$$

$$r = \frac{e}{\sqrt{6}} \text{ --> } d = \frac{2e}{\sqrt{6}}$$

$$V''_{(l)} = -6l < 0 \text{ --> Maximum}$$

d : l = $\frac{2e}{\sqrt{6}} : \frac{2e}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : \sqrt{6} = 1 : \sqrt{2} =$ **$\sqrt{2} : 2$**

$$V_{(l)} = \pi * \frac{4e^2 - l^2}{16} * l$$

$$V_{(2e/\sqrt{3})} = \frac{\pi}{16} * \left(4e^2 * \frac{2e}{\sqrt{3}} - \left(\frac{2e}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{\pi}{16} * \left(\frac{8e^3}{\sqrt{3}} - \frac{8e^3}{3 * \sqrt{3}}\right)$$

$$V_{(2e/\sqrt{3})} = \frac{\pi}{16} * 8e^3 * \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 * \sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{16} * 8e^3 * \frac{2}{3 * \sqrt{3}}$$