Extrem Aufgabe 91

Welchen Radius r hat ein Zylinder, der bei gegebenem Oberflächeninhalt O maximales Volumen V hat?

Zielfunktion:

r = Radius der Grundfläche

$V = \pi * r^2 * h$

Nebenbedingung:

$O = 2 * \pi * r^2 + 2 * \pi * r * h \quad |- 2\pi r^2$

$O - 2 * \pi * r^2 = 2 * \pi * r * h \quad |:2\pi r$

$$h = \frac{0 - 2 * \pi * r^2}{2 * \pi * r} = \frac{O}{2 * \pi * r} - r$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$V_{(r)} = \pi * r^2 * \left(\frac{O}{2 * \pi * r} - r\right) = \frac{O * r}{2} - \pi * r^3 \text{ -->}$$

$$V_{(r)} = r * \left(\frac{O}{2} - \pi * r^2\right) \text{ --> } V_{(r)} > 0 \text{ , wenn } r > 0 \text{ oder } r < \sqrt{\frac{O}{2 * \pi}}$$

$$0 < r < \sqrt{\frac{O}{2 * \pi}}$$

$$V'_{(r)} = \frac{O}{2} - 3 * \pi * r^2$$

$$\frac{O}{2} - 3 * \pi * r^2 = 0 \quad | +3\pi r^2$$

$$\frac{O}{2} = 3 * \pi * r^2 \quad | :3\pi$$

$$r^2 = \frac{O}{6 * \pi} \quad |\sqrt{\ }$$

$$\color{red}{\mathbf{r = \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}}}$$

$$h = \frac{O}{2 * \pi * \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}} - \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}} =$$

$$h = \frac{O - 2 * \pi * \frac{O}{6 * \pi}}{2 * \pi * \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}}$$

$$h = \frac{2/3 * O}{2 * \pi * \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}} = \frac{O}{3 * \pi * \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}} = \frac{O * \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}}{O/2} = 2 * \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}} = 2 * r$$

$V''_{(r)} = - 6 * \pi * r < 0$ --> Maximum

$V\left(\sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}\right) = \pi * \frac{O}{6 * \pi} * 2 * \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}} = \frac{O}{3} * \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}$ absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = V_{\left(\sqrt{\frac{O}{2 * \pi}}\right)} = 0 < \frac{O}{3} \sqrt{\frac{O}{6 * \pi}}$$