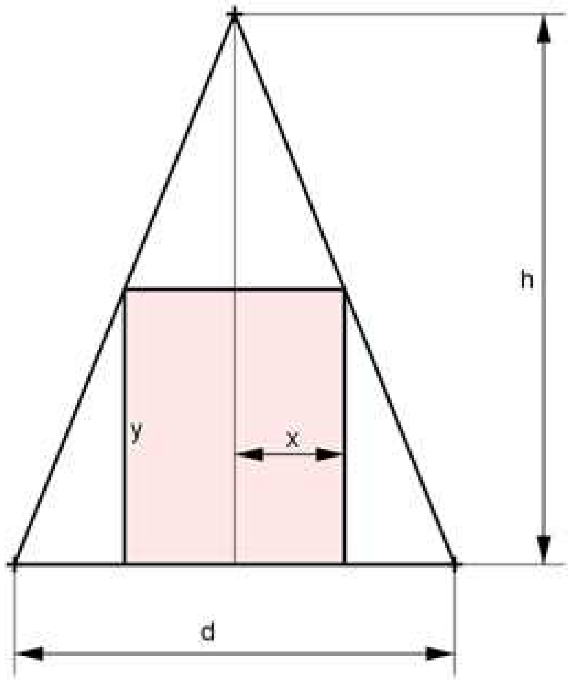
# Extrem Aufgabe 93

Wie groß ist der Grundkreisradius x des Zylinders, der dem Kegel mit dem Radius r und der Höhe h einbeschrieben ist und dessen Oberfläche O maximal sein soll?




Zielfunktion:

$O = 2 * \pi * x^2 + 2 * \pi * x * y$

Nebenbedingung:

$d = 2 * r$

Strahlensatz:

$$\frac{2x}{d} = \frac{h - y}{h} \quad | *h$$

$$\frac{2x * h}{d} = h - y \quad | +y$$

$$\frac{2x * h}{d} + y = h \quad | - \frac{2x * h}{d}$$

$$y = h - \frac{2x * h}{d} = h - \frac{2x * h}{2 * r} = h - \frac{x * h}{r}$$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$O_{(x)} = 2 * \pi * x^2 + 2 * \pi * x * \left(h - \frac{x * h}{r}\right)$$

$$O_{(x)} = 2 * \pi * \left(x^2 + \frac{xhr - x^2h}{r}\right)$$

Zu untersuchende Funktion:

$$O_{(x)} = x^2 + \frac{xhr - x^2h}{r} \qquad 0 < x < r$$

$$O'_{(x)} = 2x + \frac{hr - 2xh}{r}$$

$$2x + \frac{hr - 2xh}{r} = 0 \mid *r$$

$$2xr + hr - 2xh = 0 \mid +2xh - 2xr$$

$$hr = 2xh - 2xr = 2x * (h - r) \mid :(h - r)$$

$$2x = \frac{hr}{(h - r)} \mid :2$$

$$\mathbf{x = \frac{hr}{2 * (h - r)}}$$ gilt für $h \neq r$, sonst Division durch 0

Wenn $x = 0 \rightarrow hr = 0$

Wenn $x = r \rightarrow$

$$r = \frac{hr}{2 * (h - r)} \mid * 2 * (h - r)$$

$2r * (h - r) = hr$

$2hr - 2r^2 = hr \ |:r$

$2h - 2r = h \ |+2r$

$2h = h + 2r \ |-h$

$2r = h \ | :2$

$r = h/2 \qquad\qquad 0 < r < h/2$

$$y = h - \frac{\frac{hr}{2 * (h - r)} * h}{r} = h - \frac{h^2}{2 * (h - r)}$$

$$O''_{(x)} = 2 - \frac{2h}{r}$$

$$O''_{(h/2)} = 2 - \frac{2h}{h/2} = 2 - 4 < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$O_{\left(\frac{hr}{2(h - r)}\right)} = 2 * \pi * \left(\left(\frac{hr}{2(h - r)}\right)^2 + \frac{\frac{hr}{2(h - r)} * hr - \left(\frac{hr}{2(h - r)}\right)^2 * h}{r}\right)$$

$$O_{\left(\frac{hr}{2(h - r)}\right)} = 2 * \pi * \left(\frac{h^2r^3 + 2 * h^2r^2(h - r) - h^3r^2}{r * (2(h - r))^2}\right)$$

$$O_{\left(\frac{hr}{2(h - r)}\right)} = 2 * \pi * \left(\frac{h^2r^3 + 2h^3r^2 - 2h^2r^3 - h^3r^2}{r * (2(h - r))^2}\right)$$

$$O_{\left(\frac{hr}{2(h - r)}\right)} = 2 * \pi * \left(\frac{h^3r - h^2r^2}{(2(h - r))^2}\right) = 2\pi * \frac{h^2r * (h - 2)}{4 * (h - r)^2}$$

$$O_{\left(\frac{hr}{2(h - r)}\right)} = \pi * \frac{h^2r}{2 * (h - r)} \text{ absolutes Maximum für } 0 < r < h/2$$