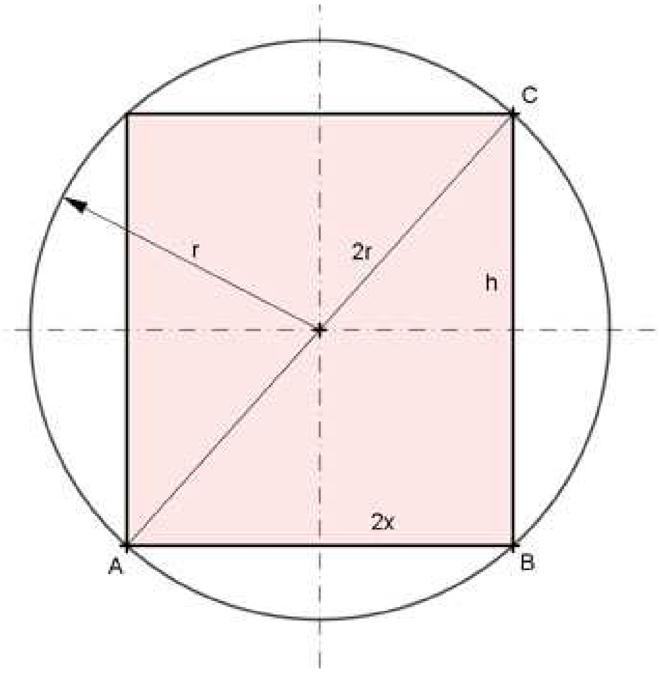
Extrem Aufgabe 95

Wie groß ist die Höhe h des Zylinders, der der Kugel mit dem Radius r einbeschrieben ist und dessen Oberfläche O maximal sein soll?



Zielfunktion:

$O = 2 * \pi * x^2 + 2 * \pi * x * h$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck ABC:

$(2r)^2 = (2x)^2 + h^2$

$4r^2 = 4x^2 + h^2 \mid -h^2$

$4r^2 - h^2 = 4x^2 \mid :4$

$x^2 = \frac{4r^2 - h^2}{4} \mid \sqrt{}$

$x = \frac{1}{2} * \sqrt{4r^2 - h^2}$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$$O_{(h)} = 2 * \pi * \frac{4r^2 - h^2}{4} + 2 * \pi * h * \frac{1}{2} * \sqrt{4r^2 - h^2}$$

$$O_{(h)} = \pi * \frac{4r^2 - h^2}{2} + \pi * h * \sqrt{4r^2 - h^2}$$

$$O_{(h)} = \frac{\pi}{2} * (4r^2 - h^2 + 2 * h * \sqrt{4r^2 - h^2})$$

Zu untersuchende Funktion:

$$O_{(h)} = 4r^2 - h^2 + 2 * h * \sqrt{4r^2 - h^2} \qquad 0 < h < 2r$$

Summen- und Produktregel:

$u' = 2$

$$v' = \frac{1}{2} * \frac{-2h}{\sqrt{4r^2 - h^2}}$$

$$O'_{(h)} = -2h + 2 * \sqrt{4r^2 - h^2} - \frac{1}{2} * \frac{2h * 2h}{\sqrt{4r^2 - h^2}}$$

$$O'_{(h)} = \frac{-2h * \sqrt{4r^2 - h^2} + 2 * (4r^2 - h^2) - 2h^2}{\sqrt{4r^2 - h^2}}$$

$$\frac{-2h * \sqrt{4r^2 - h^2} + 8r^2 - 4h^2}{\sqrt{4r^2 - h^2}} = 0 \quad |* \sqrt{4r^2 - h^2}$$

$$-2h * \sqrt{4r^2 - h^2} + 8r^2 - 4h^2 = 0 \quad |+ 4h^2 - 8r^2$$

$$-2h * \sqrt{4r^2 - h^2} = 4h^2 - 8r^2 \quad | :(-2)$$

$$h * \sqrt{4r^2 - h^2} = 4r^2 - 2h^2 \quad |^2$$

$$h^2 * (4r^2 - h^2) = 16r^4 - 16r^2h^2 + 4h^4$$

$4r^2h^2 - h^4 = 16r^4 - 16r^2h^2 + 4h^4 \mid +h^4 - 4r^2h^2$

$5h^4 - 20r^2h^2 + 16r^4 = 0 \mid :5$

$h^4 - 4h^2r^2 + 3{,}2r^4 = 0$

Substitution:

$h^2 = z$

$z^2 - 4r^2z + 1{,}6r^4 = 0$

p, q - Formel:

$p = -4r^2 \; ; \; q = 1{,}6r^4$

$$z_{1,2} = \frac{-(-4r^2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4r^2}{2}\right)^2 - 3{,}2r^4}$$

$z_{1,2} = 2r^2 \pm \sqrt{0{,}8r^4}$

$z_{1,2} = 2r^2 \pm 0{,}89r^2$

$z_1 = 2{,}89r^2$

$z_2 = 1{,}11r^2$

Rücksubstitution:

$h_{1,2}{}^2 = 2{,}89r^2 \mid \surd$

$h_{1,2} = \pm\, r * 1{,}7$

$h_1 = 1{,}7 * r$

$h_2 = -1{,}7 * r$ keine Lösung, < 0

$h_{3,4}{}^2 = 1{,}1r^2 \mid \surd$

$h_3 = 1{,}05 * r$

$h_4 = -1{,}05 * r$ keine Lösung < 0

Überprüfung, für welche h $O'_{(h)} = 0$ wird.

$$O'_{(1,7r)} = \frac{-2 * 1,7r * \sqrt{4r^2 - (1,7r)^2} + 2 * (4r^2 - (1,7r)^2) - 2 * (1,7r)^2}{\sqrt{4r^2 - (1,7r)^2}}$$

$$O'_{(1,7r)} = \frac{-\ 3,57r^2 + 2,22r^2 - 5,78r^2}{1,05} \neq 0 \text{ --> keine Lösung}$$

$$O'_{(1,05r)} = \frac{-2 * 1,05r * \sqrt{4r^2 - (1,05r)^2} + 2 * (4r^2 - (1,05r)^2) - 2 * (1,05r)^2}{\sqrt{4r^2 - (1,05r)^2}}$$

$$O'_{(1,05r)} = \frac{-\ 3,57r^2 + 5,78r^2 - 2,22}{1,05} = 0$$

Zur Beurteilung, ob $O''_{(h)}$ > oder < 0: (Begründung siehe Kurvendiskussion Aufgabe 105)

$$u = -2h * \sqrt{4r^2 - h^2} + 8r^2 - 4h^2$$

$$u' = -2 * \sqrt{4r^2 - h^2} + \frac{1}{2} * \frac{(-2h) * (-2h)}{\sqrt{4r^2 - h^2}} - 8h$$

$$u' = \frac{-2 * (4r^2 - h^2) + 2h^2 - 8h * \sqrt{4r^2 - h^2}}{\sqrt{4r^2 - h^2}}$$

$$O''_{(h)} = \frac{-2 * (4r^2 - h^2) + 2h^2 - 8h * \sqrt{4r^2 - h^2}}{\sqrt{4r^2 - h^2} * \sqrt{4r^2 - h^2}}$$

$$O''_{(h)} = \frac{-8r^2 + 4h^2 - 8h * \sqrt{4r^2 - h^2}}{4r^2 - h^2}$$

$$O''_{(1,05r)} = \frac{-8r^2 + 4 * (1,05r)^2 - 8 * 1,05r * \sqrt{4r^2 - 1,05r^2}}{4r^2 - (1,05r)^2}$$

$$O''_{(1,05r)} = \frac{-8r^2 + 4,44r^2 - 14,28r^2}{2,89r^2} < 0 \text{ --> lokales Maximum}$$

$$O_{(1,05r)} = \frac{\pi}{2} * (4r^2 - (1,05r)^2 + 2 * 1,05r * \sqrt{4r^2 - (1,05r)^2})$$

$$O_{(1,05r)} = \frac{\pi}{2} * 6,47r^2$$ absolutes Maximum, weil

$$O_{(0)} = \frac{\pi}{2} (4r^2 - 0^2 + 2 * 0 * \sqrt{4r^2 - 0^2}$$

$$O_{(0)} = \frac{\pi}{2} * 4r^2 < \frac{\pi}{2} * 6,47r^2$$

$$O_{(0)} = \frac{\pi}{2} (4r^2 - (2r)^2 + 2 * 2r * \sqrt{4r^2 - (2r)^2}$$

$$O_{(2r)} = 0 < \frac{\pi}{2} * 6,47r^2$$