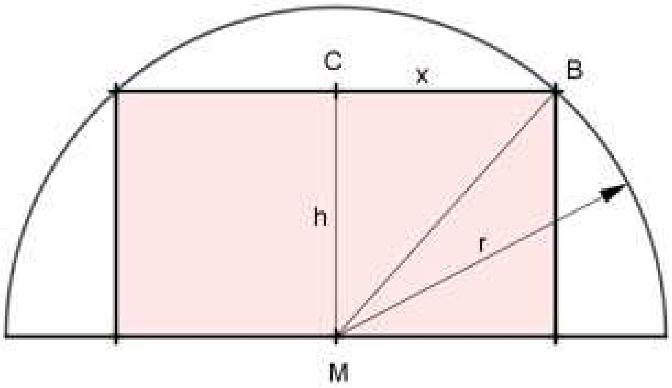
Extrem Aufgabe 97

Wie groß ist die Höhe h eines Zylinders mit maximalem Volumen V, der einer Halbkugel mit dem Radius r einbeschrieben wird?



Zielfunktion:

$V = \pi * x^2 * h$

Nebenbedingung:

Satz von Pythagoras im Dreieck MBC:

$r^2 = x^2 + h^2 \quad |-h^2$

$x^2 = r^2 - h^2$

In die Zielfunktion eingesetzt:

$V_{(h)} = 2 * \pi * (r^2 - h^2) * h$

$V_{(h)} = 2 * \pi * (r^2h - h^3)$

Zu untersuchende Funktion:

$V_{(h)} = r^2h - h^3 \qquad 0 < h < r$

$V'_{(h)} = r^2 - 3h^2$

$r^2 - 3h^2 = 0 \quad |+3h^2$

$3h^2 = r^2 \quad |:3$

$h^2 = \frac{r^2}{3} \quad |\sqrt{}$

$$h = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r * \sqrt{3}}{3}$$

$$x^2 = r^2 - \frac{r^2}{3} = \frac{2}{3} * r^2$$

$$V''_{(h)} = -6h < 0 \text{ --> Maximum}$$

$$V_{(r\sqrt{3}/3)} = \pi * \frac{2}{3} * r^2 * \frac{r * \sqrt{3}}{3}$$

$$V_{(r\sqrt{3}/3)} = \pi * \frac{2}{9} * r^3 * \sqrt{3}$$ absolutes Maximum, weil

$$V_{(0)} = \pi * (r^2 * 0 - 0^3) = 0 < \pi * \frac{2}{3} * r^3 * \sqrt{3}$$

$$V_{(r)} = \pi * (r^2 * r - r^3) = 0 < \pi * \frac{2}{3} * r^3 * \sqrt{3}$$