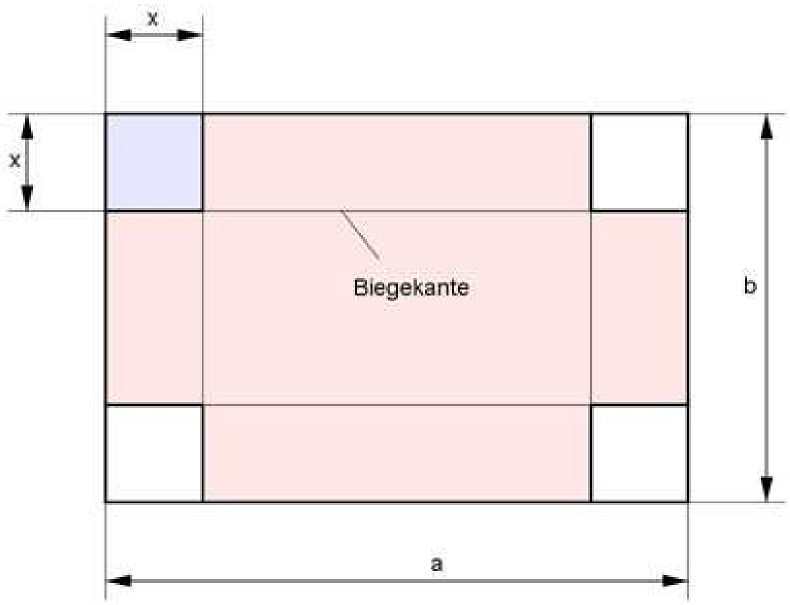
Extrem Aufgabe 99

Wie groß ist die Seite x der abgeschnittenen Ecken (bei gebenen a und b), wenn durch Umformung eine oben offene Schachtel mit maximalem Volumen entstehen soll? (siehe Aufgabe 74 und 82)



Zielfunktion:

$V = (a - 2x) * (b - 2x) * x$ $\quad$ $0 < x < b/2$ wegen $a > b$

$V_{(x)} = abx - 2x^2b - 2x^2a + 4x^3$

$V'_{(x)} = ab - 4xb - 4xa + 12x^2$

$12x^2 - 4x * (a + b) + ab = 0$

A, B, C - Formel

$A = 12$; $B = - 4(a + b)$; $C = ab$

$$x_{1,2} = \frac{4(a + b) \pm \sqrt{16(a+b)^2-4*12*ab}}{2 * 12}$$

$$x_{1,2} = \frac{4(a + b) \pm \sqrt{16a^2+32ab+16b^2-48ab}}{24}$$

$$x_{1,2} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16(a^2-ab+b^2)}}{24}$$

$$x_{1,2} = \frac{4(a+b) \pm 4 * \sqrt{a^2-ab+b^2}}{24}$$

$$x_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

$$x_1 = \frac{a+b + \sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

$$\mathbf{x_2 = \frac{a+b - \sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}}$$

$V''_{(x)} = -4b - 4a + 24x$

$V''_{(x)} = -4(a+b) + 24x$

$$V''_{(x1)} = -4(a+b) + 24 * \frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

$V''_{(x1)} = -4(a+b) + 4(a+b) + 4 * \sqrt{a^2-ab+b^2}$

$V''_{(x1)} = 4 * \sqrt{a^2-ab+b^2} > 0$ weil $a^2 - ab + b^2 > 0$ --> Minimum

$V''_{(x2)} = -4 * \sqrt{a^2-ab+b^2} < 0$ --> Maximum

$V_{(0)} = (a - 2 * 0) * (b - 2 * 0) * 0 = 0$

$$V_{(b/2)} = \left(a - 2 * \frac{b}{2}\right) * \left(b - 2 * \frac{b}{2}\right) * \frac{b}{2} = 0$$

Graphen für 1) a = 5 und b = 3 und für 2) a = 8 und b = 4:

$$1)\ x_1 = \frac{5+3-\sqrt{5^2 - 5*3 + 3^2}}{6} = 0{,}61$$

$V_{(x1)} = (5 - 2 * 0{,}61)(3 - 2 * 0{,}61) * 0{,}61 = 4{,}1$

$$2)\ x_2 = \frac{8 + 4 - \sqrt{8^2 - 8*4 + 4^2}}{6} = 0{,}85$$

$V_{(x2)} = (8 - 2 * 0{,}85)(4 - 2 * 0{,}85) * 0{,}85 = 12{,}32$

Dies ist zwar kein allgemeiner Beweis, aber das Maximum liegt bei beiden zwischen 0 und b/2 --> das errechnete Maximum ist ein absolutes.